神戸大学

数学

問題

2018年度入試

【学部】　国際人間科学部、理学部、医学部、工学部、農学部、海事科学部

【入試名】　前期日程

【試験日】　2月25日

1 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする．辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を R とする．また $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ．

(3) t が (2) で求めた値をとるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ．

2 k を 2 以上の整数とする．また

$$f(x) = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

とおく．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) $x > 0$ において，関数 $y = f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ．

(2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1 > 1$，$x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすとき，$x_n > 1$ を示せ．

(3) (2) の数列 $\{x_n\}$ に対し，

$$x_{n+1} - 1 < \frac{k-1}{k}(x_n - 1)$$

を示せ．また $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

3 さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数を a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし，2 次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を考える．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ．

(2) $(*)$ が整数を解にもつとする．このとき $(*)$ の解は共に正の整数であり，また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ．

(3) $(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ．

4 整式 $f(x)$ は実数を係数にもつ 3 次式で，3 次の係数は 1，定数項は -3 とする．方程式 $f(x) = 0$ は，1 と虚数 α，β を解にもつとし，α の実部は 1 より大きく，α の虚部は正とする．複素数平面上で α，β，1 が表す点を順に A，B，C とし，原点を O とする．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) α の絶対値を求めよ．

(2) θ を α の偏角とする．$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S を θ を用いて表せ．

(3) S を最大にする θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とそのときの整式 $f(x)$ を求めよ．

5 座標空間において，O を原点とし，A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(1,\ 1,\ 0)$ とする．$\triangle\mathrm{OAB}$ を直線 OC の周りに 1 回転してできる回転体を L とする．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) 直線 OC 上にない点 P$(x,\ y,\ z)$ から直線 OC におろした垂線を PH とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ を x，y，z の式で表せ．

(2) 点 P$(x,\ y,\ z)$ が L の点であるための条件は

$$z^2 \leqq 2xy \text{ かつ } 0 \leqq x + y \leqq 2$$

であることを示せ．

(3) $1 \leqq a \leqq 2$ とする．L を平面 $x = a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ．

(4) 立体 $\{(x,\ y,\ z) \mid (x,\ y,\ z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ．