神戸大学

数学

問題

2017年度入試

【学部】 国際人間科学部、理学部、医学部、工学部、農学部、海事科学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

1 n を自然数とする．

$$f(x) = \sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3$$

とおく．$3 < \pi < 4$ であることを用いて，以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x) < 0$ であることを示せ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ．

(3) (2) における解を x_n とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx_n$ を求めよ．

2 n を自然数とする．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) 実数 x に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式をみたす S の値を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - S = (-1)^n\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx$$

(3) 不等式

$$\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx \leqq \frac{1}{n+1}$$

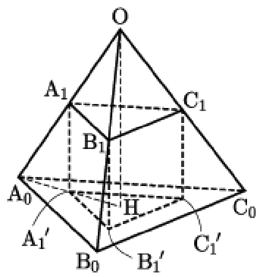
が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}$ を求めよ．

3 1 辺の長さが a_0 の正四面体 $\mathrm{OA_0B_0C_0}$ がある．図のように，辺 $\mathrm{OA_0}$ 上の点 $\mathrm{A_1}$，辺 $\mathrm{OB_0}$ 上の点 $\mathrm{B_1}$，辺 $\mathrm{OC_0}$ 上の点 $\mathrm{C_1}$ から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A_1A_1}'$，$\mathrm{B_1B_1}'$，$\mathrm{C_1C_1}'$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A_1B_1C_1}$-$\mathrm{A_1}'\mathrm{B_1}'\mathrm{C_1}'$ は正三角柱になるとする．ただし，ここでは底面が正三角形であり，側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする．同様に，点 $\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{A_2}'$，$\mathrm{B_2}'$，$\mathrm{C_2}'$，……を次のように定める．正四面体 $\mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$ において，辺 OA_k 上の点 A_{k+1}，辺 OB_k 上の点 B_{k+1}，辺 OC_k 上の点 C_{k+1} から平面 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+1}'$，$\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}'$，$\mathrm{C}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}'$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}$-$\mathrm{A}_{k+1}'\mathrm{B}_{k+1}'\mathrm{C}_{k+1}'$ は正三角柱になるとする．辺 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ の長さを a_k とし，正三角柱 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$-$\mathrm{A}_k'\mathrm{B}_k'\mathrm{C}_k'$ の体積を V_k とするとき，以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) 点 O から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線を OH とし，$\theta = \angle\mathrm{OA_0H}$ とするとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) a_1 を a_0 を用いて表せ．

(3) V_k を a_0 を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} V_k$ を求めよ．



4 $\overrightarrow{v_1} = (1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2} = (1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3} = (-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4} = (-1,\ -1,\ 1)$ とする．座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ $\left(1,\ 2,\ 3,\ 4\ \text{の目がそれぞれ確率}\ \dfrac{1}{4}\ \text{で出る}\right)$ をふるごとに，出た目が k $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ のときは $\overrightarrow{v_k}$ だけ移動する．すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として，サイコロを $(n+1)$ 回目にふって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \overrightarrow{v_k}$$

である．ただし，$\mathrm{P_0} = \mathrm{O}$ である．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) 点 $\mathrm{P_2}$ が x 軸上にある確率を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}} \perp \overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ となる確率を求めよ．

(3) 4 点 $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$ が同一平面上にある確率を求めよ．

(4) n を 6 以下の自然数とする．$\mathrm{P}_n = \mathrm{O}$ となる確率を求めよ．

5 r，c，ω は正の定数とする．座標平面上の動点 P は時刻 $t=0$ のとき原点にあり，毎秒 c の速さで x 軸上を正の方向へ動いているとする．また，動点 Q は時刻 $t=0$ のとき点 $(0,\ -r)$ にあるとする．点 P から見て，動点 Q が点 P を中心とする半径 r の円周上を毎秒 ω ラジアンの割合で反時計回りに回転しているとき，以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) 時刻 t における動点 Q の座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ．

(2) 動点 Q の描く曲線が交差しない，すなわち，$t_1 \fallingdotseq t_2$ ならば $(x(t_1),\ y(t_1)) \fallingdotseq (x(t_2),\ y(t_2))$ であるための必要十分条件を r，c，ω を用いて与えよ．