神戸大学

数学

問題

2016年度入試

【学部】 発達科学部、理学部、医学部、工学部、農学部、海事科学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

1 四面体 OABC において，P を辺 OA の中点，Q を辺 OB を 2 : 1 に内分する点，R を辺 BC の中点とする．P，Q，R を通る平面と辺 AC の交点を S とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 比 $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}| : |\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$ を求めよ．

(3) 四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$ を求めよ．

2 a を正の定数とし，$f(x) = |x^2 + 2ax + a|$ とおく．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) $a = 2$ とする．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を求めよ．

(3) $0 < a \leqq \dfrac{3}{2}$ とする．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を a を用いて表せ．また，その条件をみたす点 $(a,\ b)$ の領域を ab 平面上に図示せよ．

3 a を正の定数とし，2 曲線 $C_1 \colon y = \log x$，$C_2 \colon y = ax^2$ が点 P で接しているとする．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) P の座標と a の値を求めよ．

(2) 2 曲線 C_1，C_2 と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

4 約数，公約数，最大公約数を次のように定める．

- 2 つの整数 a，b に対して，$a = bk$ をみたす整数 k が存在するとき，b は a の約数であるという．
- 2 つの整数に共通の約数をそれらの公約数という．
- 少なくとも一方が 0 でない 2 つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という．

以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) a，b，c，p は 0 でない整数で $a = pb + c$ をみたしているとする．

(i) $a = 18$，$b = 30$，$c = -42$，$p = 2$ のとき，a と b の公約数の集合 S，および b と c の公約数の集合 T を求めよ．

(ii) a と b の最大公約数を M，b と c の最大公約数を N とする．M と N は等しいことを示せ．ただし，a，b，c，p は 0 でない任意の整数とする．

(2) 自然数の列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n \ (n = 1,\ 2,\ \cdots),\quad a_1 = 3,\quad a_2 = 4$$

で定める．

(i) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

(ii) a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ．

(iii) a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ．

5 極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r = 1 + \cos\theta$（$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$）を C とする．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ となる点の直交座標を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi} \frac{dy}{dx}$ を求めよ．

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ．

(4) 曲線 C の長さを求めよ．