琉球大学

数学

問題

2014年度入試

【学部】 教育学部、理学部、医学部、工学部、農学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

【問題解答前の確認事項】

〔注意〕　農学部と学校教育〈数学〉を除く教育学部は 5 6 のみ解答．他は 1 ～ 4 を解答．

1 次の問いに答えよ．（50 点）

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$ を求めよ．

(2) $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$ である二等辺三角形 ABC において，$\mathrm{BC}=2x$，内接円の半径を r とおく．

① r を x を用いて表せ．

② r が最大となる x の値を求めよ（最大値そのものは求める必要はない）．

2 a，b，c，d は $a+d=0$，$ad-bc=1$ をみたす実数とし，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．（50 点）

(1) $A^2=-E$ を示せ．

(2) p，q は実数で $p^2+q^2 \neq 0$ をみたすとする．実数 x，y に対して $(pA+qE)(xA+yE)=E$ が成り立つとき，x，y を p，q で表せ．

(3) θ を実数とする．すべての正の整数 n に対して

$$\{(\cos\theta)E+(\sin\theta)A\}^n=(\cos n\theta)E+(\sin n\theta)A$$

が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．ここで，$(\sin\theta)A$ は行列 A の $\sin\theta$ 倍を表す．

3 整数 m，n は $m \geqq 1$，$n \geqq 2$ をみたすとする．次の問いに答えよ．（50 点）

(1) $x>0$ のとき，$y=\log x$ の第 1 次導関数 y' と第 2 次導関数 y'' を求めよ．答を記すのみでよい．

(2) 座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(m,\ \log m)$，$\mathrm{B}(m+1,\ \log m)$，$\mathrm{C}(m+1,\ \log(m+1))$ を頂点とする三角形の面積を S_m とする．S_m を m を用いて表せ．答を記すのみでよい．

(3) $f(m)=\log m+S_m-\displaystyle\int_m^{m+1}\log x\,dx$ とおく．$f(m)<0$ が成り立つことを，$y=\log x$ のグラフを用いて説明せよ．

(4) $f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)<0$ であることを用いて，不等式

$$\log 1+\log 2+\cdots+\log(n-1)<n\log n-n+1-\frac{1}{2}\log n$$

を証明せよ．

(5) 不等式 $n!<e\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ を証明せよ．ただし，e は自然対数の底である．

4 1 個のさいころを繰り返し投げて景品を当てるゲームを行う．景品は A と B の 2 種類あり，次の規則にしたがって景品をもらえるとする．

- 出た目の数が 6 のときは，景品 A をもらえる．
- 出た目の数が 4，5 のときは，景品 B をもらえる．
- 出た目の数が 1，2，3 のときは，景品はもらえない．
- 景品 A と景品 B の 2 種類とももらうことができたらゲームは終了する．

ちょうど n 回さいころを投げ終わったところでゲームが終了する確率を p_n とする．次の問いに答えよ．（50 点）

(1) p_2 の値を求めよ．

(2) n を 2 以上の整数とする．p_n を n を用いて表せ．

(3) n を 2 以上の整数とする．不等式

$$p_{n+1}-p_n<\frac{2}{3}(p_n-p_{n-1})$$

を示せ．ただし，$p_1=0$ とする．

5 $\triangle$ABC において，辺 AB を $2:1$ に内分する点を D，辺 AC を $3:1$ に内分する点を E とし，線分 CD，BE の交点を P とする．次の問いに答えよ．（50 点）

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2) $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AC}=4$，$\mathrm{AP}=\sqrt{7}$ のとき，$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ．

6 a，b を実数とし，放物線 $y=x(x-a)$ を C とする．次の問いに答えよ．（50 点）

(1) C 上の点 $(t,\ t(t-a))$ における C の接線の方程式を求めよ．

(2) 点 $(b,\ 0)$ から C に，相異なる 2 本の接線が引けるとする．このとき a，b がみたす不等式を求め，その不等式が表す領域を，解答欄の ab 平面（省略）に図示せよ．

(3) C と x 軸が囲む部分の面積を $S(a)$ とする．関数 $y=S(a)$ $(-2 \leqq a \leqq 2)$ のグラフをかけ．