熊本大学

数学

問題

2019年度入試

【学部】 教育学部、理学部、医学部、薬学部、工学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

【試験時間】 120分

【問題解答前の確認事項】

〔注意〕　理・工・医（保健〈放射線技術科学・検査技術科学〉）・薬は 1 〜 4，医（医）は 3 〜 6，教育（実技系を除く）・医（保健〈看護〉）は 1，2，5，7 を解答.

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{2}{a_n}+1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

以下の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して $a_n \fallingdotseq 2$ を示せ.

(2) $b_n=\dfrac{3}{a_n-2}+1$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) $a_n>\dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 n を求めよ.

2 1 個のさいころを投げて，出た目の数を a とする．a が偶数のときは $b=\dfrac{1}{2}a$，a が奇数のときは $b=\dfrac{1}{2}(a+3)$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) $a>b$ となる確率を求めよ.

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5}>0.5$ および $\cos\dfrac{\pi}{5}<0.9$ を示せ.

(3) $S=\cos\dfrac{\pi}{a}+\sin\dfrac{\pi}{b}$ とおく．$a>b$ であるとき，$S<1.7$ となる条件付き確率を求めよ.

3 座標平面上の曲線 $C_1\colon y=x^2+2ax-2a+1$ および $C_2\colon y=x^3+1$ を考える．以下の問いに答えよ.

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ．ただし，$a \fallingdotseq 0$ とする.

(2) (1) で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ.

4 座標平面上の曲線 $y=x\sin 3x+3x^2\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする．曲線 C の接線で原点を通るものを l とし，その接点の x 座標を a とする．ただし，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) a の値を求めよ.

(2) 曲線 C と直線 l の共有点の座標をすべて求めよ.

(3) 曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を求めよ.

5 座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく．直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする．ただし，a，b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする．以下の問いに答えよ.

(1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ.

(2) 点 A$(1,\ -2)$，点 B$(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ.

(3) $\triangle$APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ.

6 赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする．n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った．以下の問いに答えよ.

(1) k を 0 以上 n 以下の整数とする．取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ.

(2) k を 1 以上 n 以下の整数とする．取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ.

(3) ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ.

7 以下の問いに答えよ.

(1) 実数 a，b に対して，$f(x)=x^2+ax+b$ とおく．$y=f(x)$ は x 軸および直線 $y=2x+3$ に接しているとする．実数 a，b を求めよ．このとき，$y=f(x)$，x 軸および直線 $y=2x+3$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(2) 座標平面上の曲線 $C_1\colon y=x^2+2px-2p$ および $C_2\colon y=x^3$ の共有点がちょうど 2 個になるような実数 p の値をすべて求めよ.