熊本大学

数学

問題

2017年度入試

【学部】 医学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

1 半径 1 の円に外接する $\triangle ABC$ について，$\angle CAB = 2x$，$\angle ABC = 2y$，$\angle BCA = 2z$ とする．$\triangle ABC$ の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $S = \dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{1}{\tan y} + \dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ．

(2) $z = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの x，y を求めよ．

2 $s > 0$，$t > 0$ とする．複素数平面上の $\alpha = -i$，$\beta = 2 - 2i$，$\gamma = s + ti$ を表す点をそれぞれ A，B，C とする．さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，$\triangle ACD$ が正三角形になるようにする．点 D を表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) z を s，t を用いて表せ．

(2) α，β，γ が等式 $4(\beta-\alpha)^2 + (\gamma-\alpha)^2 - 2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) = 0$ を満たすとき，γ と z をそれぞれ求めよ．

(3) (2) で求めた γ と z に対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle DFC = \theta$ とする．このとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

3 $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ $(x > 0)$ とする．座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし，点 $P(t,\ f(t))$ $(t > 0)$ における曲線 C の接線を l とする．以下の問いに答えよ．

(1) 接線 l と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ．

(2) (1) で求めた t の値を a とする．実数 k に対し，直線 $l_k : y = k(x-a) + f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ．

(3) (2) の直線 l_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき，それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\dfrac{1}{3}$ となるような k を求め，そのときの曲線 C と直線 l_k で囲まれた部分の面積を求めよ．

4 n は 2 以上の自然数とする．1 から $2n$ までの自然数の順列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2n} に対して，分数の和

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_{n+2}} + \cdots + \frac{a_n}{a_{2n}} \qquad \cdots\cdots(*)$$

を考える．1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して $(*)$ がとり得る値の最大値を S_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) S_2 を求めよ．

(2) S_n を与える順列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2n} の例を 1 つ挙げ，その理由を述べよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ．