熊本大学

数学

問題

2015年度入試

【学部】 医学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

1 $\triangle$ABC の 3 辺の長さを BC $= a$，AC $= b$，AB $= c$ とし，条件

$$a + b + c = 1,\ 9ab = 1$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ．

(1) a の値の範囲を求めよ．

(2) $\theta = \angle$C とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ．

2 p，q，r を実数とする．空間内の 3 点 A$(1,\ p,\ 0)$，B$(q,\ 1,\ 1)$，C$(-1,\ -1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ．ただし，O を原点とする．

(1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ．

(2) q，r を p を用いて表せ．

(3) p'，q'，r' を実数とし，空間内の 3 点を A$'(1,\ p',\ 0)$，B$'(q',\ 1,\ 1)$，C$'(-1,\ -1,\ r')$ とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，p'，q'，r' を p を用いて表せ．

(4) (3) における 3 点 A$'$，B$'$，C$'$ は一直線上にないことを示せ．

3 a と b を正の実数とする．$\triangle$ABC において，$\angle$B と $\angle$C は鋭角とする．点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする．また，$\mathrm{BX}_1 = a$，$\mathrm{CX}_1 = b$ とする．各 $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$ に対して以下の操作を行う．

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする．また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする．点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする．

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) l_1 を a，b を用いて表せ．

(2) l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ．

(3) $b = 8a$ のとき，$l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ．必要ならば，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてよい．

4 r を正の実数とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ．

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用いて表せ．

(4) (3) で求めた r の式を $f(r)$ とおく．$\displaystyle\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ．