

浜松医科大学

平成 27 年 度

数 学

注意事項

1. 問題は 4 題で、すべて必答問題です。
2. 解答はすべて別紙(解答用紙 4 枚)の該当する欄に記入しなさい。
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は、表面の右下に「裏面に続く」と記入し、表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい。表面とは書く方向が反対になります。
4. 図やグラフは解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて、ていねいに描きなさい。
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して、論述式的答案を読みやすく書きなさい。
6. 問題用紙の余白は、下書きやミスがないかどうか見直すのに十分活用しなさい。

1

(必答問題) (配点 50)

数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = \frac{1}{3}$ および漸化式

$$(n+2)a_n - 2(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n a_{n+1} = 0$$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$ を満たす. 以下の問いに答えよ.

- (1) a_2 を求めよ.
- (2) すべての自然数 n について $a_n \neq 0$ が成り立つことを証明せよ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (4) $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とする. このとき, すべての自然数 n について $S_n < 2$ が成り立つことを証明せよ.

2

(必答問題) (配点 50)

整数ではない実数 x に対して $f(x) = \frac{1}{x - [x]}$ と定める.

ただし, $[x]$ は $l < x < l + 1$ を満たす整数 l を表す. 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(\sqrt{2}), f(f(\sqrt{2}))$ を計算し, 簡潔な形で答えよ.
- (2) $f(\sqrt{3}), f(f(\sqrt{3})), f(f(f(\sqrt{3})))$ を計算し, 簡潔な形で答えよ.
- (3) 自然数 n に対して, $n < x < n + 1$ かつ $f(x) = x$ を満たす x を求めよ.
- (4) 自然数 n を 1 つ固定する. $n < x < n + 1$ の範囲の x で, $f(x)$ が整数ではなく, さらに $f(f(x)) = x$ を満たす x を大きい順に並べる. その中の x で $f(x) = x$ を満たすものは何番目に現れるかを答えよ.

3

(必答問題) (配点 50)

t は実数で $0 < t < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする. 平面上に点 $O(0, 0)$, $A(-1, 0)$, $P(\cos t, \sin t)$, $Q(1, \sin t)$ をとる. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 点 A と点 P を通る直線を l , 点 O と点 Q を通る直線を m とする. このとき l , m の交点 R の座標を求めよ.

(2) t が $0 < t < \frac{\pi}{2}$ の範囲全体を動くときに点 R が描く曲線を C とする. このとき, 点 (x, y) ($x > 0, y > 0$) が C 上にあるための条件を x, y の式で表せ.

(3) 曲線 C の点 R における接線を n とする. ある t に対して直線 l, m がなす鋭角と直線 m, n がなす鋭角が等しくなる. この状況のもとで, 以下の問いに答えよ.

(a) 点 $P(\cos t, \sin t)$ の座標を求めよ.

(b) 直線 l と n のなす鋭角を θ とおく. また, 点 O を中心とし半径が 1 の円と直線 n との 2 交点のうち, y 座標が正の点を $S(\cos \phi, \sin \phi)$ とおく. このとき, $\theta = \phi$ を示せ.

4

(必答問題) (配点 50)

 α, β を

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)\cdots(3n+n)}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

および

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(3n^2+1^2)(3n^2+2^2)(3n^2+3^2)\cdots(3n^2+n^2)}{(n^2+1^2)(n^2+2^2)(n^2+3^2)\cdots(n^2+n^2)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

とおく. このとき $\alpha < \beta$ を示せ. また, α と β の値をそれぞれ求めよ.