浜松医科大学

平 成 26 年 度

数 学

注意事項

1. 問題は 3 題で，すべて必答問題です.
2. 解答はすべて別紙(解答用紙 3 枚)の該当する欄に記入しなさい.
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「**裏面に続く**」と記入し，表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい．表面とは書く方向が反対になります.
4. **図やグラフ**は解答の中で重要な位置をしめます．その特徴をおさえて，ていねいに描きなさい.
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して，**論述式**の答案を読みやすく書きなさい.
6. 問題用紙の余白は，下書きや**ミスがないかどうか見直す**のに十分活用しなさい.

1 (必答問題) (配点 75)

p を正の実数として，放物線 $C: y^2 = 4px$ を定める．C の頂点を O，焦点を F，準線を $l: x = -p$ とする．C 上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ 2\sqrt{pa})\ (a > 0)$ と $\mathrm{B}(b,\ -2\sqrt{pb})\ (b > 0)$ を考えるとき，以下の問いに答えよ．

(1) A における C の接線を $l(\mathrm{A})$ とし，$l(\mathrm{A})$ と準線 l との交点を P とする．$l(\mathrm{A})$ の方程式をかいて，P の座標を求めよ．また，線分 AP の長さは線分 AF の長さより大きいことを示せ．

(2) 接線 $l(\mathrm{A})$ が直線 AB と A において直交するとき，b を a，p を用いて表せ．また a が $0 < a < \infty$ の範囲内を動くとき，b の最小値を求めよ．

以下(2)の最小値を実現する C 上の 2 点を A_0，B_0 とし，接線 $l(\mathrm{A}_0)$ と準線 l の交点を P_0 とする．

(3) 直線 OA_0 と直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{B}_0$ は O において直交することを示せ．

(4) $\triangle \mathrm{A}_0\mathrm{OB}_0$ の面積を S，線分 $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$ と C で囲まれた図形の面積を T とするとき，比 $S : T$ を求めよ．

2 （必答問題）（配点 75）

関数 $f(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}\ \left(0<|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ の増減表を作成し，極値を求めよ．

(2) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ は，3 次式 $P(t)=t(2t^2-1)$ を用いて，

$$f''(x)=3\sqrt{3}\,P\left(\frac{1}{\sin x}\right)-P\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

と表されることを示せ．また，$0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $f''(x_1)>f''(x_2)$ となることを示せ．

(3) k を定数とするとき，方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解は何個あるか．k の値によって分類せよ．

(4) $y=f(x)$ の変曲点はただ 1 つ存在することを示せ．また，この変曲点が第何象限にあるか，調べよ．

3 (必答問題)(配点 50)

(1) r は自然数，n は r より大きい整数とする．

2 項係数 ${}_{k+r}\mathrm{C}_r\,(k=0,1,\cdots\cdots,n-r)$ の次の等式を示せ．

$$\sum_{k=0}^{n-r} {}_{k+r}\mathrm{C}_r = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$$

以下整数 $n\,(n \geqq 2)$ に対し，次の確率分布に従う確率変数 X を考える．

$$P(X=k)=\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_2}\ (k=0,1,\cdots\cdots,n-1)$$

(2) X の期待値 $\mu_n=E(X)$ を求めよ．また，$P(X \geqq m) \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たす最大の整数 m を M_n とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{\mu_n}$ を求めよ．