浜松医科大学 前期

平 成 23 年 度

数　　学

注意事項

1. 問題 $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ すべて必答問題です。
2. 解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「**裏面に続く**」と記入し，表面の下の部分をもって上にめくり記入しなさい。表面とは上下が反対になります。
3. **図**や**グラフ**は解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて，ていねいに描きなさい。
4. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して，**論述式**の答案を読みやすく書きなさい。
5. 問題用紙の余白は，下書きや**ミスのない計算**のために十分活用しなさい。

$\boxed{1}$ (必答問題)(配点　50点)

2次曲線 C が媒介変数 θ を用いて,

$$x = 3 + 5\cos\theta,\ y = 2 + 3\sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と表されている。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の方程式を x, y を用いて表せ。また，C を座標平面上に図示せよ。

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(3 + 5\cos\theta,\ 2 + 3\sin\theta)$ における C の接線 ℓ の方程式は,

$$\frac{\cos\theta}{5}(x-3) + \frac{\sin\theta}{3}(y-2) = 1$$

となることを示せ。

(3) 曲線 C の焦点を F_1, F_2 とする。$i = 1$, 2 に対し，F_i を通り，接線 ℓ に垂直な直線 m_i の方程式を求めよ。

(4) $i = 1$, 2 に対し，直線 m_i と ℓ との交点を Q_i とする。点 $\mathrm{O}'(3,\ 2)$ とするとき，線分 $\mathrm{O}'\mathrm{Q}_i$ の長さを求めよ。

(5) Pが曲線 C を一周するとき，線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の長さの最大値，最小値，およびそのときの点Pをそれぞれ求めよ。

2 （必答問題）（配点　50 点）

医学部における研究では，いろいろな動物が用いられる。これらの動物を生育して，研究者たちに販売する者の立場から，動物A，B，Cを題材にして，以下の問題を考察する。

(1) 動物A，Bを生育するには，3種類の栄養素p，q，rが必要である。生育量（単位kg）と栄養素の量は，ともに実数で示される。

（条件a）　Aをx kg生育するには，pが$5x$，qが$5x$，rがxの量，同時に必要である。Aの販売価格は10万円/kgである。

（条件b）　Bをy kg生育するには，pが$4y$，qがy，rが$2y$の量，同時に必要である。Bの販売価格は5万円/kgである。

手持ちの栄養素は今，pが5，qが4，rが2の量であると仮定する。このとき，A，Bをそれぞれ何kg生育すれば，販売額が最大となるか。販売額の最大値，およびそのときのA，Bの生育量をそれぞれ求めよ。

(2) 動物A，Bに加えて，動物Cもp，q，rの栄養素によって生育できることがわかる。

（条件c）　Cをz kg生育するには，pが$2z$，qが$3z$，rがzの量，同時に必要である。Cの販売価格は8万円/kgである。

手持ちの栄養素は今，pが5，qが4の量であるが，(1)の場合と違ってrはいくらでも手に入るものと仮定する。次の問いイ，ロ，ハに答えよ。

イ　Cの生育量z kgは，$z=k\left(0 \leqq k \leqq \dfrac{11}{10}\right)$として値を固定し，A，Bの生育量をそれぞれ$x$ kg，y kgとして変化させる。このとき，点$(x,\ y)$の動く領域$D(k)$を図示せよ。さらに，$(x,\ y)$がこの領域を動くとき，販売額の最大値を$w(k)$とかく。$w(k)$をkの式で表せ。

ロ　Cの生育量$z=k$を，$0 \leqq k \leqq \dfrac{11}{10}$の範囲から$\dfrac{11}{10} \leqq k \leqq \dfrac{4}{3}$の範囲に変更する。このとき，点$(x,\ y)$の動く領域$D(k)$および販売額の最大値$w(k)$はどうなるか，調べよ。

ハ　A，B，Cをそれぞれ何kg生育すれば，販売額が最大となるか。販売額の最大値，およびそのときのA，B，Cの生育量をそれぞれ求めよ。

$\boxed{3}$ (必答問題) (配点　50 点)

実数 k は $\dfrac{\pi}{3} \leqq k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にあるとする。

$$f(x) = \int_{-k}^{k} \sin(x - t)\cos t \, dt \qquad (-k \leqq x \leqq k)$$

$$g(x) = \int_{-k}^{k} |\sin(x - t)| \cos t \, dt \qquad (-k \leqq x \leqq k)$$

と定めるとき，以下の問いに答よ。

(1) $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ と $g\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$， 2 つの定積分の値をそれぞれ求めよ。

(2) 差 $f(x) - g(x)$ は，区間 $-k \leqq x \leqq k$ で増加することを示せ。

(3) 曲線 $y = g(x)$ の変曲点は何個あるか，調べよ。

4 (必答問題)(配点　50点)

(1)　3つの数 $2^{10}-1$, $3^{10}-1$, $4^{10}-1$ の積を

$y=(2^{10}-1)(3^{10}-1)(4^{10}-1)$ として，全体集合 U と部分集合 A, B を次のように定める。

$$U=\{x \mid x \text{ は } y \text{ の正の約数}\}$$

$$A=\{x \mid x\in U \text{ かつ } x \text{ は } 44 \text{ の倍数}\}$$

$$B=\{x \mid x\in U \text{ かつ } x \text{ は } 45 \text{ の倍数}\}$$

このとき，部分集合 $A\cap\overline{B}$ に属する要素は，全部で何個あるか。

以下，数列 $a_n=4^n-1$ ($n=1$, 2, 3, ……)を考える。

(2)　次の命題Pを証明せよ。

<u>命題P</u>　n が3で割り切れることは，a_n が9で割り切れるための十分条件である。

(3)　命題Pにおいて，十分条件を必要十分条件に書きかえて，命題Qをつくる。命題Qの真偽を答えよ。

(4)　9と11のうち，どちらか一方の数で割り切れるけれども，他方の数では割り切れないような a_n だけを取り出し，残りはすべて取り去る。こうして得られる a_n の部分列を小さい順に並べると，23番目の項は元の数列では第 k 項になるという。番号 k を求めよ。