横浜市立大学

52

【医学科】

数 学 問 題

(平 成 30 年 度)

【注意事項】

1. この問題冊子は「数学」である。
2. 試験時間は120分である。
3. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開いてはいけない。ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
4. 試験開始後すぐに，以下の5および6に記載されていることを確認すること。
5. この問題冊子の印刷は1ページから4ページまでである。
6. 解答用紙は問題冊子中央に4枚はさみこんである。
7. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は，手をあげて監督者に申し出ること。
8. 試験開始後，4枚ある解答用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること(1枚につき受験番号は2箇所，氏名は1箇所)。
9. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
10. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は採点されない場合もあるので注意すること。
11. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
12. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない。
13. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び，指示に従うこと。
14. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

〔I〕 以下の問いに答えよ。ただし，解答のみを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) $p^3+q^3=35$ が成り立つような素数 p, q の組 (p,q) をすべて求めよ。

(2) 方程式

$$\sqrt{\frac{1+x}{2}}=1-2x^2$$

をみたす実数 x をすべて求めよ。

(3) 鋭角三角形ABCの垂心をOとし，点Aから辺BCに下ろした垂線と辺BCの交点を A'，点Cから辺ABに下ろした垂線と辺ABの交点を C' とする。また，A'', C'' を $\overrightarrow{\mathrm{AA}''}=2\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$, $\overrightarrow{\mathrm{CC}''}=2\overrightarrow{\mathrm{CC}'}$ をみたす点とする。三角形OBC, OAC, OABの面積をそれぞれ α, β, γ とするとき，三角形 $\mathrm{OA}''\mathrm{C}''$ の面積を α, β, γ を用いて表せ。

(4) 6^{74} の桁数および最高位の数字を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$, $\log_{10}4=0.6021$, $\log_{10}5=0.6990$, $\log_{10}6=0.7782$, $\log_{10}7=0.8451$, $\log_{10}8=0.9031$, $\log_{10}9=0.9542$ とする。

〔II〕 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ について, 方程式

$$f'(x) = 0$$

がただ 1 つの実数解を持つことを証明せよ。

(2) (1) におけるただ 1 つの実数解を x_0 とする。このとき

$$a \leqq x_0 \leqq a + \frac{1}{4}$$

をみたす実数 a を 1 つ求めよ。

(3) 不等式

$$\frac{5}{8} < f(x_0) < \frac{11}{16}$$

を証明せよ。

〔Ⅲ〕 以下の問いに答えよ。

(1) nを素数でない4以上の整数とする。このとき, n^2の約数dで, $n < d < n^2$をみたすものが存在することを証明せよ。

(2) 整数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{50} {}_{101}\mathrm{C}_k$ の約数の個数を求めよ。

(3) $X = 3^4\cdot({}_{11}\mathrm{C}_0+{}_{11}\mathrm{C}_1+{}_{11}\mathrm{C}_2+{}_{11}\mathrm{C}_3+{}_{11}\mathrm{C}_4+{}_{11}\mathrm{C}_5)$とし, 全体集合$U = \{1, 2, \ldots, X\}$を考える。$U$の部分集合$A, B, C$を

$$A = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } X \text{ の約数}\}$$
$$B = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } X^2 \text{ の約数}\}$$
$$C = \{x \mid x = 1, 2, \ldots, X-1\}$$

とする。

(ア) X^2の約数で, かつXより小さく, Xの約数でないような整数からなるUの部分集合をDとする。DをA, B, Cを用いて表せ。

(イ) (ア)におけるDの要素の個数を求めよ。

〔IV〕 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $\tan x$ の導関数を求めよ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$ を求めよ。

(3) n を自然数とするとき,

$$2n\int \frac{1}{\cos^{2n+1}x}dx = \frac{\tan x}{\cos^{2n-1}x} + (2n-1)\int \frac{1}{\cos^{2n-1}x}dx$$

が成り立つことを証明せよ。

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 x}dx$ を求めよ。