横浜市立大学

52

数　学　問　題

（平 成 28 年 度）

【注意事項】

1. この問題冊子は「数学」である。
2. 試験時間は120分である。
3. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開いてはいけない。ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
4. 試験開始後すぐに，以下の5および6に記載されていることを確認すること。
5. この問題冊子の印刷は1ページから5ページまである。
6. 解答用紙は問題冊子中央に4枚はさみこんである。
7. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は，手をあげて監督者に申し出ること。
8. 試験開始後，4枚ある解答用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること（1枚につき受験番号は2箇所，氏名は1箇所）。
9. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
10. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は採点されない場合もあるので注意すること。
11. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
12. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない。
13. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び指示に従うこと。
14. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

【補足説明】

冊子番号	５２
科　　目	数　学
問題番号	〔Ⅲ〕
内　　容	4ページ 3行目 「$-\infty < x < \infty$」は「xは実数」という意味である。

〔 I 〕 以下の問いに答えよ。ただし, 解答のみを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) ある大学で N 人の学生が数学を受験した。その得点を $x_1, x_2, \cdots, x_N$ とする。平均値 $\bar{x}$ および 分散 s^2 は各々

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} \\ s^2 &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_N - \bar{x})^2}{N}\end{aligned}$$

で与えられる。標準偏差 $s\ (>0)$ は

$$s = \sqrt{s^2}$$

となる。このとき x 点を取った学生の **偏差値** は

$$t = 50 + 10 \times \frac{x - \bar{x}}{s}$$

で与えられる ($x \in \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$)。偏差値は**無単位**であることに注意せよ。

Y 大学で $N = 3n$ 人の学生が数学を受験し, たまたま $2n$ 人の学生が a 点, 残りの n 人の学生が b 点を取ったとしよう。簡単にするために $a < b$ とする。a 点を取った学生および b 点を取った学生の偏差値を求めよ $\boxed{(1\text{–}1)}$, $\boxed{(1\text{–}2)}$。

(2) 方程式

$$x^2 - 3y^2 = 13$$

の整数解を求める。簡単にするために $x > 0,\ y > 0$ とする。まず

$$X = ax + by, \quad Y = cx + dy$$

とおく。$a,\ b,\ c,\ d$ を自然数として, (X, Y) が再び方程式

$$X^2 - 3Y^2 = 13$$

を満たすための組 (a, b, c, d) を 1 つ求めよ $\boxed{(2\text{–}1)}$。

次に, 解の組 (x, y) で $x > 500$ となる (x, y) を 1 つ求めよ $\boxed{(2\text{–}2)}$。

(3) n を自然数とする。漸化式

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n - 6n = 0$$
$$a_1 = 1,\ a_2 = 1$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ $\boxed{\ (3)\ }$ 。

(4) n を 0 以上の整数とする。以下の不定積分を求めよ。

$$\int \left\{ -\frac{(\log x)^n}{x^2} \right\} dx = \sum_{k=0}^{n} \boxed{\ (4)\ }$$

ただし, 積分定数は書かなくてよい。

〔II〕 n 枚のカードの表（おもて）面に相異なる整数値が書かれている。ただし，どのような数値が書かれているのかはあらかじめわかっていない。

はじめにすべてのカードが裏返しでおかれている。ここから1枚ずつ好きなカードをめくっていき，書かれている数値が n 枚のカードの中で最大だと思ったらめくるのをやめる1人ゲームを考える。n 枚のカードをすべてめくり終えてしまった場合，次にめくるカードがないのでゲームは終了である。

ゲームの勝敗は，最後にめくったカードに書かれていた数値が n 枚のカードの中で最大であれば勝ち，そうでなければ負け とする。

n 未満の自然数 k について以下の戦略 S_k を考える：

はじめの k 枚までは必ずめくり，その k 枚に書かれていた数値のうち最大のものを M とする。$k+1$ 枚目以降で M より大きな数が書かれたカードをめくったら，ただちにめくるのをやめる。

戦略 S_k にしたがった場合に，このゲームに勝つ確率を $P_{n,k}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $P_{3,1}$ を求めよ。

(2) i を $k+1$ 以上，n 以下の整数とする。戦略 S_k にしたがった場合に，ちょうど i 枚のカードをめくって勝つ確率を求めよ。

(3) n が十分に大きいとき，戦略 S_k を使ってどのくらい勝つことが出来るのかを考えてみよう。n に対してどのくらいの k を用いるかによって勝てる確率は変わる。簡単にするため，$n=3p$ の場合を考える。ただし，p は自然数である。このとき $k=p$ として，極限値

$$\lim_{p\to\infty} P_{n,k}$$

を求めよ。

〔III〕 関数 $y=\tan x$ は, 区間 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ で単調増加である。したがって, この区間で**逆関数**を作ることが出来る。それを

$$y=\phi(x) \quad (-\infty<x<\infty)$$

と書く（この逆関数を $\mathrm{Arctan}\, x$ と書く参考書もある)。正確を期すために, $-\frac{\pi}{2}<\phi(x)<\frac{\pi}{2}$ としておく。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\phi(\sqrt{2}x+1)+\phi(\sqrt{2}x-1)\right\}$$

とおく。$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 積分

$$\int_0^1\frac{1}{x^4+1}dx$$

を求めたい。正確な値は求められないので, 以下のようにする。即ち, 関数 $G(x)$ で

$$\int_0^1\frac{1}{x^4+1}dx=G(\sqrt{2}+1)$$

となる関数を求めよ。

(3) 積分の等式

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^4 x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^4 x}dx$$

を示せ。

(4) 積分

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^4 x}dx$$

を求めよ。

〔Ⅳ〕以下の問いに答えよ。

(1) ド・モアブルの定理を用いて

$$\sin(7\theta)$$

を $\sin\theta$, $\cos\theta$ およびそれらの累乗で表わせ。

(2) 3 次方程式

$$7x^3 - 35x^2 + 21x - 1 = 0$$

を解け。

(3) 和

$$\frac{1}{\tan^2\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\tan^2\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\tan^2\frac{3\pi}{7}}$$

を求めよ。