横浜市立大学

5 2

数　学　問　題

（平 成 27 年 度）

【注意事項】

1. この問題冊子は「数学」である。
2. 試験時間は 120 分である。
3. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開いてはいけない。ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
4. 試験開始後すぐに，以下の 5 および 6 に記載されていることを確認すること。
5. この問題冊子の印刷は 1 ページから 5 ページまである。
6. 解答用紙は問題冊子中央に 4 枚はさみこんである。
7. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は，手をあげて監督者に申し出ること。
8. 試験開始後，4 枚ある解答用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること（1 枚につき受験番号は 2 箇所，氏名は 1 箇所）。
9. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
10. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は採点されない場合もあるので注意すること。
11. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
12. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない。
13. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び指示に従うこと。
14. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

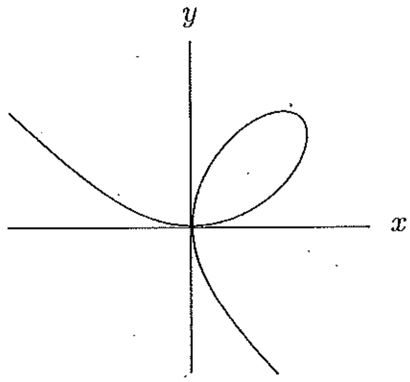
〔I〕以下の問いに答えよ。ただし, 解答のみを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) 数直線上の原点 O を出発点とする。硬貨を投げるたびに, 表が出たら 2, 裏が出たら 1 だけ正の方向へ進むものとする。点 n に到達する確率を p_n とする。ただし, n は自然数とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(ア) 3 以上の n について, p_n, p_{n-1}, p_{n-2} の関係式を求めよ $\boxed{\text{(1–i)}}$。

(イ) 3 以上の n について, p_n を求めよ $\boxed{\text{(1–ii)}}$。

(2) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ $(a > 0)$ で定義される曲線はデカルトの葉（または, 葉線）と呼ばれている。



これによって囲まれる第 1 象限の面積 S を求めたい。極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いると, 曲線は

$$r(\theta) = \frac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。これより面積は

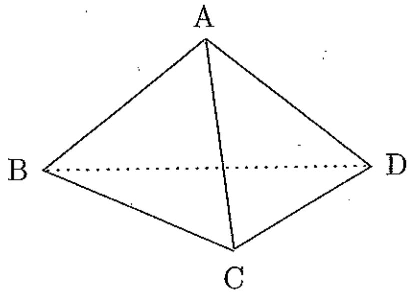
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\theta)^2 d\theta$$

と表せる。$t = \tan\theta$ とおいて S を求めよ $\boxed{(2)}$。ただし,

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(t)dt$$

と解釈する。

(3) 1辺の長さが $a\ (>0)$ の正4面体を考え, その頂点をそれぞれ A, B, C, D とする。



また, 辺 AD の中点を P, 辺 BC の中点を Q とする。このとき, ベクトル $\overrightarrow{AQ}$ と $\overrightarrow{BP}$ の内積 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}$ を求めよ $\boxed{(3)}$。

(4) 数列の和

$$\sum_{j=1}^{n} j^2\, 2^{n-j}$$

を求めよ $\boxed{(4)}$。

〔II〕 以下の問いに答えよ。

(1) 平面上に相異なる 3 点がある。この 3 点が同一直線上にないとき, この 3 点を通る円は必ず存在し, かつ, 一つだけしかないことを証明せよ。

(2) 平面上に相異なる 3 点 A, B, C があり, A, B 間の距離は, 他の 2 点間の距離より短いとする。このとき, 線分 AB を直径とする円は, 内部に点 C を含まないことを証明せよ。

(3) 平面上に相異なる 4 点 がある。この 4 点が同一円周上になく, かつ, どの 3 点も同一直線上にないとする。このとき, うまく 3 点を選ぶと, その 3 点を通る円は, 残りの点を内部に含まないようにできることを証明せよ。

〔Ⅲ〕等式

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1 \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

が知られている。左辺を見て，右辺を想像することは一見難しい。これを証明するために，以下の問いに答えよ。

(1) $(*)$ の左辺を変形し，近似式

$$(1+x)^a \fallingdotseq 1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3 \quad (|x|<1)$$

を用いて（a は実数），その近似値を求めよ。ただし，簡単にするため $5^{-1/3} \fallingdotseq 0.6$ とする。

(2) 3 次方程式

$$x^3+3x-4=0$$

を用いて，上の等式 $(*)$ を証明せよ。

〔IV〕 自然数 N に対して, 自然数からなる 2 つの数列 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ と $b_1, b_2, \cdots, b_{N+1}$ があり, 条件

$$i = 1, 2, \cdots, N \text{ に対して } \quad b_i < a_i \quad \text{かつ} \quad b_{i+1} < a_i$$

をみたすと仮定する。そして

$$F = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_i - N}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} b_i}$$

とおく。 N は固定して, 以下の問いに答えよ。

(1) 自然数からなる数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の最小値を x とする。このとき

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{と} \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$$

は, 同値であることを証明せよ。

(2) F のとりえる最小値を求めよ。

(3) F が最小値をとるための, 数列に関する条件を求めよ。