

数 学 問 題

(平成 25 年度)

【注意事項】

1. この問題冊子は「数学」である。
2. 試験時間は 120 分である。
3. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない。ただし、表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
4. 試験開始後すぐに、以下の 5 および 6 に記載されていることを確認すること。
5. この問題冊子の印刷は 1 ページから 3 ページまでである。
6. 解答用紙は問題冊子中央に 3 枚はさみこんである。
7. 問題冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は、手をあげて監督者に申し出ること。
8. 試験開始後、3 枚ある解答用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること（1 枚につき受験番号は 2 箇所、氏名は 1 箇所）。
9. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
10. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は採点されない場合もあるので注意すること。
11. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
12. 解答用紙を切り離したり、持ち帰ってはいけない。
13. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快や用便等、やむを得ない場合には、手をあげて監督者を呼び指示に従うこと。
14. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

〔I〕以下の問いに答えよ。ただし、解答のみを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) a, b, c を実数として, A, B, C を

$$A = a + b + c, \quad B = a^2 + b^2 + c^2, \quad C = a^3 + b^3 + c^3$$

とおく。このとき abc を A, B, C を用いて表せ $\boxed{(1)}$ 。

(2) n を自然数とする。このとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{2n}C_{2k+1}}{2k+2}$$

を求めよ $\boxed{(2)}$ 。

(3) ボタンを押すと X, Y, Z いずれかの文字が画面に表示される機械がある。その機械では, X と Y が表示される確率は, 等しくかつ Z が表示される確率の 2 倍である, とする。

いま, ボタンを 5 回続けて押す。このとき, (XYZYX のように) X, Y, Z すべての文字が少なくとも 1 回表示される確率を求めよ $\boxed{(3)}$ 。

(4) 逆行列をもつ 2 次の正方行列 A が表す 1 次変換が, 円 $C: (x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 3^2$ 上の点を C 上の点に移すとき, A を求めよ $\boxed{(4)}$ 。ただし, A は単位行列と異なる行列とする。

(5) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sin x + \cos x} dx$$

を求めよ $\boxed{(5)}$ 。

〔Ⅱ〕 a を正の定数とする。 n を 0 以上の整数とし、多項式 $P_n(x)$ を n 階微分を用いて

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - a^2)^n \quad (n \geq 1), \quad P_0(x) = 1$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $n = 2$ および $n = 3$ に対して

$$P_2(-a), \quad P_3(-a)$$

を求めよ。

(2) $u = u(x), v = v(x)$ を何回でも微分可能な関数とする。そのとき、ライプニッツの公式

$$(uv)^{(n)} = {}_n C_0 u^{(n)} v + {}_n C_1 u^{(n-1)} v' + \cdots + {}_n C_k u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + {}_n C_{n-1} u' v^{(n-1)} + {}_n C_n u v^{(n)}$$

を数学的帰納法を用いて証明せよ (ただし, $n \geq 1$)。ここで, $w^{(k)}$ は $w = w(x)$ の第 k 次導関数を表し, また $w^{(0)} = w$ とする。

(3) 一般の n に対して

$$P_n(-a), \quad P_n(a)$$

を求めよ。

〔Ⅲ〕 座標平面上において、原点を中心とする半径 1 の円に、放物線 $C: y = -\frac{p}{2}x^2 + q$ ($p > 0, q > 0$) が異なる 2 点で接しているとする。以下の問いに答えよ。

(1) p, q の満たす関係式 および p, q の取りうる範囲を求めよ。

(2) x 軸と C で囲まれた図形 (ただし, $y \geq 0$) の面積 S を p を用いて表せ。

(3) (1) の条件の下で p が動くとき, S の最小値を求めよ。