０６

横浜市立大学　一般前期

数　学　問　題

（平 成 24 年 度）

【注意事項】

1. この問題冊子は「０６　数学」である。
2. 試験時間は120分である。
3. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開いてはいけない。ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
4. 試験開始後，以下の５および６に記載されていることを確認すること。
5. この問題冊子の印刷は１ページから４ページまでである。
6. 解答用紙は問題冊子中央に３枚はさみこんである。問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は採点されない場合もあるので注意すること。
7. ３枚ある解答用紙に，受験番号と氏名を所定の欄に試験開始後，記入すること（１枚につき受験番号は２箇所，氏名は１箇所）。
8. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙がない場合は，手をあげて監督者に申し出ること。
9. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。裏面には記入しないこと。
10. 問題冊子の中の白紙部分については下書き等に使用してよい。
11. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない。
12. 試験終了まで退室を認めない。試験中の気分不快や用便等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び指示に従うこと。
13. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

〔I〕以下の問いに答えよ。ただし, 解答のみを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) a を正の定数として, 関数 $f(x)$ を

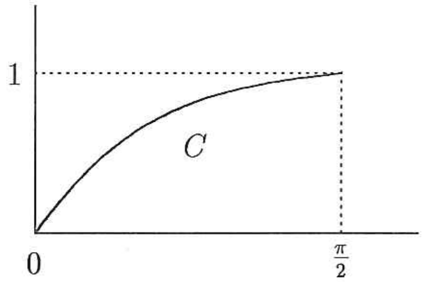
$$f(x) = \log(\sqrt{a^2 + x^2} - x)$$

とおく。$f(x)$ を微分して, 多項式

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

を求めよ $\boxed{(1)}$ 。

(2) 座標平面において, 曲線 $C : y = \sin x$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 上の点 $\mathrm{P}(a, \sin a)$ における C の法線が x 軸と交わる点を Q とする。線分 PQ を直径とする円が, x 軸と交わる Q 以外の点を R とする。このとき, 三角形 PQR の面積 $S(a)$ を求めよ $\boxed{(2\text{–i})}$ 。次に, a が動くとき, $S(a)$ の最大値を求めよ $\boxed{(2\text{–ii})}$ 。



(3) 数列 $\{a_n\}$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \cdots$$

を次のような群に分け, 第 m 群には m 個の数が入るようにする。

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{\text{第 1 群}}\ \Bigg|\ \underbrace{\frac{1}{2},\ \frac{2}{1}}_{\text{第 2 群}}\ \Bigg|\ \underbrace{\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}}_{\text{第 3 群}}\ \Bigg|\ \underbrace{\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}}_{\text{第 4 群}}\ \Bigg|,\ \cdots,\ \Bigg|\ \underbrace{\frac{1}{m},\ \frac{2}{m-1},\ \cdots,\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m}{1}}_{\text{第 } m \text{ 群}}\ \Bigg|,\ \cdots$$

このとき, 数列 $\{a_n\}$ において,

$$\frac{q}{p}$$

は第何項か $\boxed{(3\text{–i})}$ 。ただし, $\frac{q}{p}$ は, 例えば $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ のように, 約分しないものとする。次に, 第100項 a_{100} を求めよ $\boxed{(3\text{–ii})}$ 。

(4) 2次の正方行列 A が

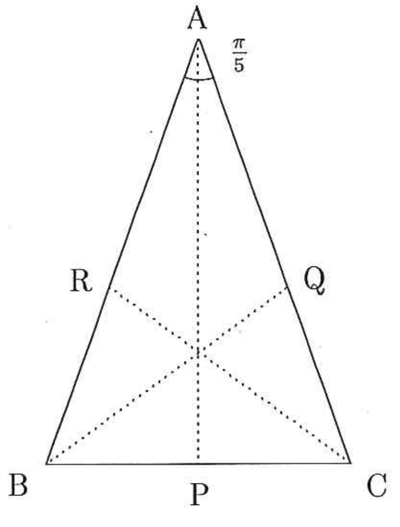
$$A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

をみたすとする。このとき, 自然数 n に対して

$$A^n\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

を求めよ $\boxed{(4)}$ 。

(5) AB=AC, BC の長さが 1, ∠A が $\frac{\pi}{5}$ の二等辺三角形 ABC を考える。頂点 A, B, C から ∠A, ∠B, ∠C の二等分線を引き, 対応する辺との交点を, それぞれ P, Q, R とする。



このとき, 三角関数の値

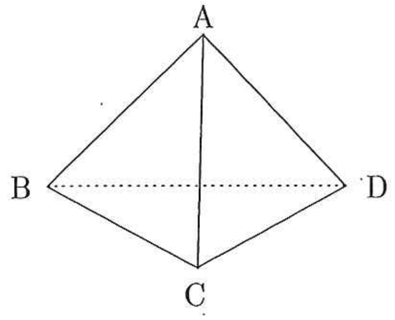
$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

を求めよ $\boxed{(5)}$ 。

〔Ⅱ〕 座標空間に, 一辺の長さが a の正四面体 ABCD がある。辺 AB, CD 上にそれぞれ点 P, Q を

$$\mathrm{AP} = \mathrm{CQ} = ta \quad (0 < t < 1)$$

となるようにとる。以下の問いに答えよ。



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ の内積を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QB}}$ の内積を求めよ。

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の長さを求めよ。

〔Ⅲ〕 $f(x)$ を区間 $[0, \infty)$ 上の連続関数とする。この区間上の $f(x)$ の積分を

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\,dx$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) α, β を正の定数として, 積分

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+\alpha x)(1+\beta x)}\,dx$$

を求めよ。

(2) a, b, c を相異なる正の定数として, 積分

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}\,dx$$

を（結果の表示を簡潔にするため）

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}\,dx = A\log a + B\log b + C\log c$$

とおく。A, B, C を求めよ。