０６

横浜市立大学 一般
数 学 問 題

（平 成 23 年 度）

【注意事項】

1. この問題冊子は「０６ 数学」である。
2. 試験時間は 120 分である。
3. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開いてはいけない。ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
4. 試験開始後，以下の５および６に記載されていることを確認すること。
5. この問題冊子の印刷は１ページから３ページまでである。
6. 解答用紙は問題冊子中央に３枚はさみこんである。問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は採点されない場合もあるので注意すること。
7. ３枚ある解答用紙に，受験番号と氏名を所定の欄（１枚につき受験番号は２箇所，氏名は１箇所）に試験開始後，記入すること。
8. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙がない場合は，手をあげて監督者に申し出ること。
9. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。裏面には記入しないこと。
10. 問題冊子の中の白紙部分については下書き等に使用してよい。
11. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない。
12. 試験終了まで退室を認めない。試験中の気分不快や用便等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び指示に従うこと。
13. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

〔Ｉ〕 以下の問いに答えよ。ただし，解答のみを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) 関数

$$f(x) = x\sin^2 x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

の最大値を与える x を α とするとき，$f(\alpha)$ を α の分数式で表すと $\boxed{(1)}$ となる。

(2) 多項式

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$$

を因数分解すると $\boxed{(2)}$ となる。

(3) N を与えられた自然数とし，$f(x)$ および $g(x)$ を区間 $(-\infty,\ \infty)$ で N 回以上微分可能な関数とする。$f(x)$ と $g(x)$ から定まる関数を次のように定義する。t を与えられた実数として，

$$\begin{aligned}(f *_t g)(x) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{2^k k!} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) \\ &= f(x)g(x) + \frac{t}{2} f'(x)g'(x) + \cdots + \frac{t^N}{2^N N!} f^{(N)}(x) g^{(N)}(x)\end{aligned}$$

とおく。ここに，$f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 次導関数である（$g^{(k)}(x)$ も同様である）。

a を実数，n を N 以下の自然数とする。$f(x) = e^{2ax}$，$g(x) = x^n$ にたいし，二項定理を用いて $(f *_t g)(x)$ を計算すると $\boxed{(3)}$ となる。

(4) 関係式

$$f(x) + \int_0^x f(t)e^{x-t}dt = \sin x$$

をみたす微分可能な関数 $f(x)$ を考える。$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めると，$f'(x) = \boxed{(4)}$ となる。$f(0) = \boxed{(5)}$ であるから $f(x) = \boxed{(6)}$ となる。

〔II〕 行列 A と E を

$$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) 行列

$$(E-A)^{-1}$$

を求めよ。

(2) 零ベクトルでないベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくとき,

$$\sqrt{X^2+Y^2}=r\sqrt{x^2+y^2}$$

をみたす r を求めよ。

(3) ベクトル $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ が与えられたとき, ベクトル $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ を次のように定める。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

このとき,

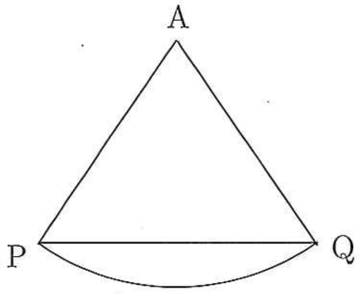
$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ と } \lim_{n\to\infty} y_n$$

を求めよ。

〔Ⅲ〕 平面上の点 A を中心とする半径 a の円から, 中心角が $60°$ で AP=AQ=a となる扇形 APQ を切り取る。つぎに線分 AP と AQ を貼り合わせて, A を頂点とする直円錐 K を作り, これを点 O を原点とする座標空間におく。

A, P はそれぞれ z 軸, x 軸上の正の位置にとり, 扇形 APQ の弧 PQ は xy 平面上の O を中心とする円 S になるようにする。

また弦 PQ から定まる K の側面上の曲線を C とする。



以下の問いに答えよ。

(1) S の半径を b とする。S 上の点 R $(b\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ に対し, K 上の母線 AR と C の交点を M とする。b と線分 AM の長さを a と θ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を xy 平面に正射影したベクトルの長さを r とする。r を a と θ を用いて表し, 定積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\{r(\theta)\}^2 d\theta$$

を求めよ。ただし, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = (a_1, a_2, a_3)$ を xy 平面に正射影したベクトルとは $\overrightarrow{\mathrm{OE'}} = (a_1, a_2, 0)$ のことである。