東京大学

物理

問題

2019年度入試

【学部】 教養学部、理学部、工学部、農学部、医学部、薬学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月26日

【試験時間】 2科目で150分

1 水平な床面上にとったx軸に沿って動く台車の上の物体の運動について以下の設問Ⅰ，Ⅱに答えよ。

Ⅰ　図1−1に示すように，台車の上にばね定数kを持ち質量の無視できるばねを介して質量mの物体が取り付けられており，物体は台車上を滑らかに動く。台車に固定された座標軸yを，ばねの自然長の位置を原点として，x軸と同じ向きにとる。ばねはy軸方向にのみ伸び縮みし，ばねと台車は十分長い。台車はx軸方向に任意の加速度aで強制的に運動させることができる。$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ として以下の設問に答えよ。

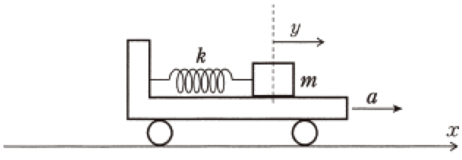

図1−1

(1)　台車が $x=0$，物体が $y=0$ で静止している状態から，台車を表1−1に示す加速度で強制的に運動させる。加速度の大きさa_1は定数である。時刻 $t=t_1$ における台車の速度，および時刻 $t=0$ から $t=t_1+t_2$ までの間に台車が移動する距離を求めよ。

表1−1

	時刻t	台車の加速度a
加速区間	$0\sim t_1$	a_1
等速区間	$t_1\sim t_2$	0
減速区間	$t_2\sim(t_1+t_2)$	$-a_1$

(2)　物体が $y=0$ で静止している状態から，表1−1で $t_1=\dfrac{T}{2}$，$t_2=nT$（nは自然数）として台車を動かす。時刻 $t=t_1+t_2$ における物体のy座標および台車に対する相対速度を求めよ。

(3)　次に台車をとめた状態で物体を $y=y_0\,(<0)$ にいったん固定したのち，$t=0$ で物体を静かに放し，表1−2に示す加速度で台車を強制的に運動させる。

　加速度の大きさa_2がある定数のとき，時刻 $t=T$ において物体のy座標は $y=0$ となり，台車に対する物体の相対速度も0となる。a_2の値および $t=\dfrac{T}{2}$ における物体のy座標を求めよ。

表1−2

	時刻t	台車の加速度a
加速区間	$0\sim\dfrac{T}{2}$	a_2
減速区間	$\dfrac{T}{2}\sim T$	$-a_2$

Ⅱ　手のひらの上に棒を立て，棒が倒れないように手を動かす遊びがある。このしくみを図1−2に示す倒立振子で考える。倒立振子は質量の無視できる変形しない長さlの細い棒の先端に質量mの質点を取り付けたものとし，台車上の点Oを支点としてx軸を含む鉛直平面内で滑らかに動くことができる。倒立振子の傾きは鉛直上向きから図1−2の時計回りの角度θ（ラジアン）で表す。θの大きさは十分に小さく，$\sin\theta\fallingdotseq\theta$，$\cos\theta\fallingdotseq 1$ の近似が成り立つ。台車は倒立振子の運動の影響を受けることなく任意の加速度aで強制的に動かせるものとする。重力加速度の大きさをg，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ として以下の設問に答えよ。

(1)　台車が加速度aで加速しているとき，台車上で見ると，θだけ傾いた倒立振子の先端の質点には，図1−2に示すように重力mgと慣性力$(-ma)$が作用している。質点に働く力の棒に垂直な成分fをθ，a，m，gを用いて表せ。ただしfの正の向きはθが増える向きと同じとする。

(2)　時刻 $t=0$ で台車は静止しており，倒立振子をθ_0傾けて静止させた状態から始まる運動を考える。時刻 $t=T$ で台車が静止し，かつ倒立振子が $\theta=0$ で静止するようにしたい。そのために倒立振子を図1−3に示すように運動させる。すなわち単振動の半周期分の運動でθ_0から0を通過して $t=\dfrac{T}{2}$ でθ_1に至り，続いてθ_1から振幅の異なる単振動の半周期分の運動ののち，$t=T$ において $\theta=0$ に戻り静止する。このような運動となるように加速度aを変化させる。

　以下の式中の空欄$\boxed{\text{ア}}$から$\boxed{\text{オ}}$に当てはまる式を選択肢①から⑰の中から選べ。選択肢は繰り返し使って良い。また空欄$\boxed{\text{i}}$から$\boxed{\text{iii}}$に当てはまる数式を書け。

　時刻 $t=0$ から $t=\dfrac{T}{2}$ の間のθは

$$\theta=\boxed{\text{ア}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\boxed{\text{イ}}$$

と表される。このように単振動する質点に働く復元力Fは

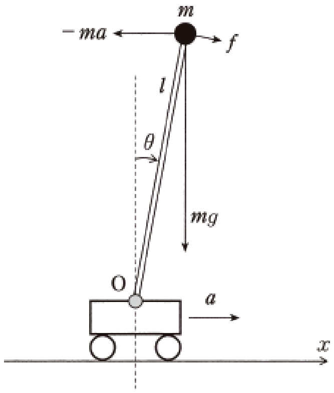

図1−2

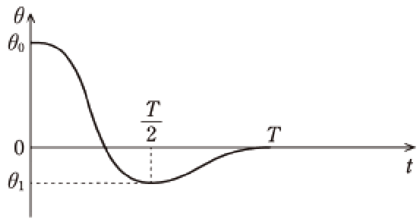

図1−3

$$F=\boxed{\text{ウ}}(\theta-\boxed{\text{イ}})$$

である。この運動を実現するためには設問Ⅱ(1)で求めたfがFと等しければよいので加速度aは次の式となる。

$$a=\left(\boxed{\text{エ}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+\boxed{\text{オ}}\right)g$$

この式の第1項が単振動の加速度と同じ形であることを考慮すると，時刻 $t=0$ から $t=\dfrac{T}{2}$ の台車の速度の変化v_1はθ_0，θ_1，g，lを用いて

$$v_1=\boxed{\text{i}}$$

となる。

時刻 $t=\dfrac{T}{2}$ から $t=T$ の運動についても単振動の半周期分であるので同様に考えれば，この区間の台車の速度の変化v_2はθ_1，g，lを用いて

$$v_2=\boxed{\text{ii}}$$

となる。よって

$$\theta_1=\boxed{\text{iii}}\theta_0$$

を得る。

① $\dfrac{\theta_0+\theta_1}{2}$　② $\dfrac{\theta_0-\theta_1}{2}$　③ $(\theta_0+\theta_1)$　④ $(\theta_0-\theta_1)$　⑤ θ_0　⑥ θ_1　⑦ 0

⑧ π　⑨ $-ma$　⑩ $-mg$　⑪ $-m(g+a)$　⑫ $-\dfrac{ma}{l}$　⑬ $-\dfrac{mg}{l}$

⑭ $-\dfrac{m(g+a)}{l}$　⑮ $-al$　⑯ $-gl$　⑰ $-(g+a)l$

2 図2－1左に示すように，面積Sの薄い円板状の電極2枚を距離dだけ隔てて平行に配置し，誘電率ε，抵抗率ρの物質でできた面積S，厚さdの一様な円柱を電極間に挿入した。電極と円柱はすき間なく接触しており，電場は向かい合う電極間のみに生じると考えてよい。電極の抵抗は無視できるものとする。この電極と円柱の組み合わせは，図2－1右に示すように，並列に接続された抵抗値Rの抵抗と電気容量Cのコンデンサーによって等価的に表現することができる。以下の設問に答えよ。

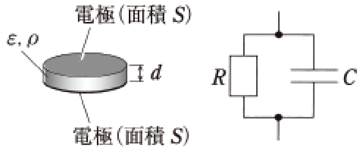

図2－1

Ⅰ　RとCをそれぞれε，ρ，S，dのうち必要なものを用いて表せ。

Ⅱ　図2－2に示すように上記の電極と円柱の組み合わせをN個積み重ねて接触させ，素子Xを構成した。スイッチを切り替えることによって，この素子Xに電圧V_0の直流電源，抵抗値R_0の抵抗，電圧$V_1\sin\omega t$の交流電源のいずれかひとつを接続することができる。ωは角周波数，tは時間である。以下の設問(1)～(3)にはεとρは用いずに，N，R，Cのうち必要なものを含む式で解答せよ。

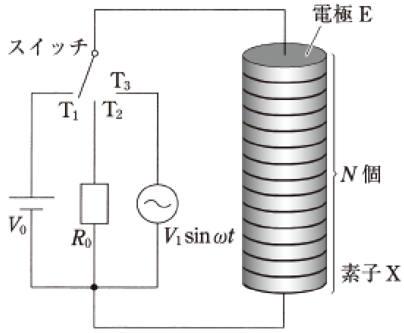

図2－2

(1)　はじめにスイッチを端子T_1に接続して素子Xに直流電圧V_0を加えた。スイッチを操作してから十分に長い時間が経過したとき，直流電源から素子Xに流れる電流の大きさと，素子Xの上端に位置する電極Eに蓄積される電気量を求めよ。

(2)　続いてスイッチを端子T_1からT_2に切り替えたところ，抵抗R_0と素子Xに電流が流れた。ただしスイッチの操作は十分短い時間内に行われ，スイッチを操作する間に素子X内の電極の電気量は変化しないものとする。スイッチを操作してから十分長い時間が経過したところ，電流が流れなくなった。スイッチを端子T_2に接続してから電流が流れなくなるまでに抵抗R_0で生じたジュール熱を求めよ。また，素子Xを構成する電極と円柱の組み合わせの個数Nを増やして同様の操作を行ったとき，抵抗R_0で発生するジュール熱はNの増加に対してどのように変化するかを次の①～④から一つ選べ。

①　単調に増加する　　②　単調に減少する　　③　変化しない

④　上記①から③のいずれでもない

(3)　次にスイッチを端子T_2からT_3に切り替え，素子Xに交流電圧$V_1\sin\omega t$を加えた。スイッチを操作してから十分に長い時間が経過したとき，交流電源から素子Xへ流れる電流を求めよ。

Ⅲ　設問Ⅱで用いた素子Xを構成する物質のεおよびρの値が未知であるとき，これらの値を求めるためにブリッジ回路を用いる方法がある。図2－3のように素子X，設問Ⅱの交流電源，交流電流計，3つの抵抗と1つのコンデンサーを配置し，交流ブリッジ回路を構成した。抵抗値と電気容量の大きさを調節したところ，交流電流計に電流が流れなくなった。このとき，図2－3のように各抵抗の抵抗値はR_1，$2R_1$，R_2，コンデンサーの電気容量は $C_0=\dfrac{1}{\omega R_2}$ であった。次の$\boxed{\text{ア}}$から$\boxed{\text{ク}}$に入る適切な数式を書け。なお，J，K，L，Mは回路上の点を表す。

K-M間の電圧は$\boxed{\text{ア}}$である。このことを用いて，抵抗R_2に流れる電流を，C_0を含まない式で表すと，$\boxed{\text{イ}}\sin\omega t+\boxed{\text{ウ}}\cos\omega t$となる。一方，J-K間の電圧は$\boxed{\text{エ}}$であることから，J-L間を流れる電流を$C$や$R$を含む式で表すと$\boxed{\text{オ}}\sin\omega t+\boxed{\text{カ}}\cos\omega t$となる。以上のことから次式が得られる。

$$\begin{cases}\varepsilon=\boxed{\text{キ}}\\ \rho=\boxed{\text{ク}}\end{cases}$$

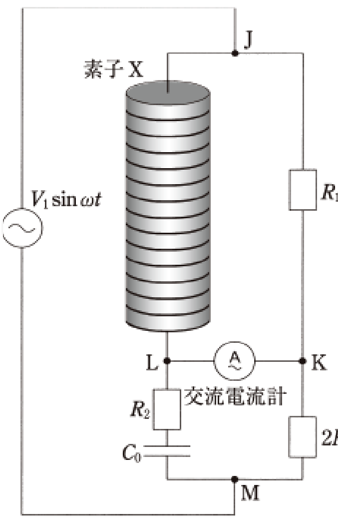

図2－3

ただし，$\boxed{\text{キ}}$と$\boxed{\text{ク}}$はR_1，R_2，ω，N，S，dのうち必要なものを用いて表すこと。

3 光の屈折に関する以下の設問Ⅰ，Ⅱに答えよ。問題文中の屈折率は真空に対する屈折率（絶対屈折率）とする。また，角度は全てラジアンで表す。光源からは全方位に光が放射されているものとする。光の反射は無視してよい。

Ⅰ　図3−1に示すように，媒質1（屈折率 n_1）と媒質2（屈折率 n_2）の境界での光の屈折を考える。境界は点Oを中心とする半径 r の球面の一部であり，左に凸とする。点Oと光源（点C）を通る直線を x 軸とし，球面が x 軸と交わる点をBとする。光源は点Bから左に x_1 だけ離れており，そこから発した図中の太矢印方向の光線は，x 軸から高さ h の球面上の点Pで屈折する。このときの入射角を θ_1，屈折角を θ_2 とする。

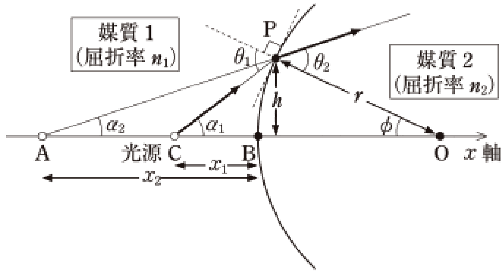

図3−1

境界の右側から光源を見ると，あたかも光源が点A（点Bから左に x_2 離れた位置）にあるように見える。本設問Ⅰおよび次の設問Ⅱでは，これを「見かけ上の光源」と呼ぶことにする。以下，入射角が微小となる光線を考える。すなわち，図中の角度 θ_1，θ_2，α_1，α_2，ϕ について微小角度 β に対する近似式 $\sin\beta \fallingdotseq \beta$ が成り立ち，$\mathrm{CP} \fallingdotseq x_1$，$\mathrm{AP} \fallingdotseq x_2$ と近似できる場合を考える。以下の問に答えよ。

(1) $\dfrac{\theta_1}{\theta_2}$ を n_1，n_2 を用いて表せ。

(2) θ_1，θ_2 をそれぞれ α_1，α_2，ϕ の中から必要なものを用いて表せ。

(3) α_1，α_2，ϕ をそれぞれ x_1，x_2，r，h の中から必要なものを用いて表せ。

(4) 問(1)−(3)で得た関係式を組み合わせることで（式1）が導かれる。x_1，x_2 を用いて空欄 $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ を埋め，この式を完成させよ。

$$n_1\left(\frac{1}{r}+\boxed{\text{ア}}\right)=n_2\left(\frac{1}{r}+\boxed{\text{イ}}\right) \qquad \text{（式1）}$$

(5) 媒質1と媒質2の境界が右に凸の球面の場合を問(1)−(4)と同様に考える。このとき，光源が点Oより左側になる場合［図3−2(A)］と，右側にある場合［図3−2(B)］が考えられる。それぞれの場合に対し，n_1，n_2，r，x_1，x_2 の間に成り立つ関係式を（式1）と同様の形で表せ。

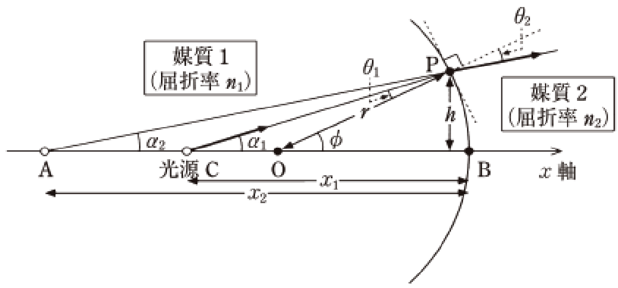

図3−2(A)

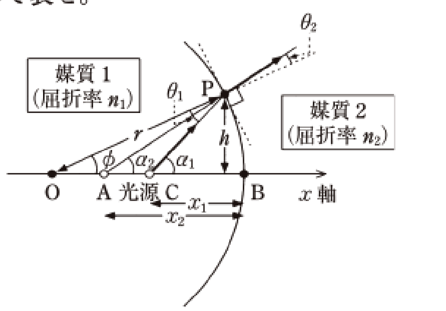

図3−2(B)

Ⅱ (1) 図3−3に示すように，屈折率 n_1 の媒質1に光源があり，屈折率 n_2 の媒質2に観察者がいる。媒質1と媒質2の境界は平面であり，（式1）において r が非常に大きい場合 $\left(\dfrac{1}{r}\fallingdotseq 0\right)$ とみなすことができる。境界から光源までの距離を L_1，境界から観察者までの距離を L_2，光源から観察者までの距離を L_1+L_2 とするとき，観察者から設問Ⅰで述べた「見かけ上の光源」までの距離を n_1，n_2，L_1，L_2 を用いて表せ。

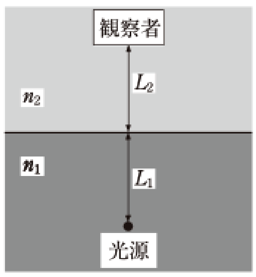

図3−3

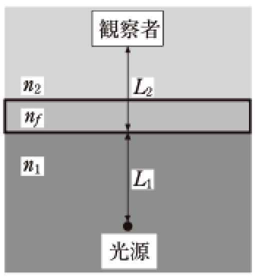

図3−4

(2) 設問Ⅱ(1)の状況で，屈折率 n_f の透明な板を図3−4に示すように境界の上に置くことで，観察者から「見かけ上の光源」までの距離を L_1+L_2 にすることができた。このとき，板の厚さ d を求めよ。また，n_f と n_1，n_2 の大小関係を示せ。ただし，n_1，n_2，n_f はすべて異なる値とする。

(3)　設問Ⅱ(2)で置いた板を取り除いたのち，媒質1と媒質2の境界を図3−5の(A)または(B)のように変形させた。変形した部分は半径 r の球の一部とみなすことができる。ただし，境界面の最大変位 δ は L_1, L_2 に比べて十分小さく無視してよい。いま，$n_1=1.5$, $n_2=1$, $L_1=1$ m, $L_2=2$ m とする。このとき，変形した部分を通して見ると，観察者から4 mの位置に「見かけ上の光源」が見えた。この場合の球面は，下に凸［図3−5(A)］，または上に凸［図3−5(B)］のうちのいずれであるか。(A)または(B)の記号で答えよ。さらに，r の値を求めよ。

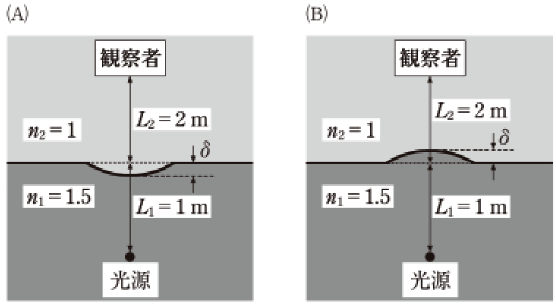

図3−5

(4)　設問Ⅱ(3)の状況で，観察者の位置に厚さの無視できる薄いレンズを一つ置き，その上から見たところ，「見かけ上の光源」が光源と同じ位置（レンズから3 mの位置）に見えた。このとき，凸レンズと凹レンズのどちらを用いたか答えよ。また，このレンズの焦点距離を求めよ。