

東京大学

数学

問題

2019年度入試

- 【学部】 教養学部、理学部、工学部、農学部、医学部、薬学部
- 【入試名】 前期日程
- 【試験日】 2月25日
- 【試験時間】 150分



「過去問ライブラリーは、(株) 旺文社が刊行する「全国大学入試問題正解」を中心とした過去問、研究・解答(解答・解説)を掲載しています。本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は、(株) 旺文社または各情報提供者に帰属します。本サービスに掲載の全部または一部の無断複製、配布、転載、譲渡等を禁止します。各設問に対する「研究・解答」は原則として旺文社が独自に作成したものを掲載しています。掲載問題のうち★印を付したものは、著作権法第67条の2第1項の規定により文化庁長官に裁定申請を行った上で利用しています。

裁定申請日 【2017年】 8/1 【2018年】 4/24、9/20 【2019年】 6/20

- 1 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

- 2 一辺の長さが1の正方形ABCDを考える. 3点P, Q, Rはそれぞれ辺AB, AD, CD上にあり, 3点A, P, Qおよび3点P, Q, Rはどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の3頂点であるとする.

$\frac{DR}{AQ}$ の最大値, 最小値を求めよ.

- 3 座標空間内に5点A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(-2, 0, 0), D(0, -2, 0), E(0, 0, -2)を考える. 線分ABの中点Mと線分ADの中点Nを通り, 直線AEに平行な平面を α とする. さらに, p は $2 < p < 4$ をみたす実数とし, 点P(p, 0, 2)を考える.

(1) 八面体PABCDEの平面 $y=0$ による切り口および, 平面 α の平面 $y=0$ による切り口を同一平面上に図示せよ.

(2) 八面体PABCDEの平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ.

(3) 実数 p が(2)で定まる範囲にあるとする. 八面体PABCDEの平面 α による切り口のうち $y \geq 0, z \geq 0$ の部分をもつ点 (x, y, z) が動くとき, 座標平面上で点 (y, z) が動く範囲の面積を求めよ.

- 4 n を1以上の整数とする.

(1) $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ の最大公約数 d_n を求めよ.

(2) $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ は整数の2乗にならないことを示せ.

- 5 以下の問いに答えよ.

(1) n を1以上の整数とする. x についての方程式

$$x^{2n-1} = \cos x$$

は, ただ1つの実数解 a_n をもつことを示せ.

(2) (1)で定まる a_n に対し, $\cos a_n > \cos 1$ を示せ.

(3) (1)で定まる数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ に対し,

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n, \quad c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ.

- 6 複素数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ および実数 a, b が, 次の3条件をみたしながら動く.

条件1: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は相異なる.

条件2: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は4次方程式 $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$ の解である.

条件3: 複素数 $\alpha\beta + \gamma\delta$ の実部は0であり, 虚部は0でない.

(1) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のうち, ちょうど2つが実数であり, 残りの2つは互いに共役な複素数であることを示せ.

(2) b を a で表せ.

(3) 複素数 $\alpha + \beta$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ.