

東京大学

数学

問題

2018年度入試

【学部】 教養学部、理学部、工学部、農学部、医学部、薬学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日



「過去問ライブラリーは、(株) 旺文社が刊行する「全国大学入試問題正解」を中心とした過去問、研究・解答(解答・解説)を掲載しています。本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は、(株) 旺文社または各情報提供者に帰属します。本サービスに掲載の全部または一部の無断複製、配布、転載、譲渡等を禁止します。各設問に対する「研究・解答」は原則として旺文社が独自に作成したものを掲載しています。掲載問題のうち★印を付したものは、著作権法第67条の2第1項の規定により文化庁長官に裁定申請を行った上で利用しています。

裁定申請日 【2017年】 8/1 【2018年】 4/24、9/20 【2019年】 6/20

1 関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

の増減表をつくり, $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow \pi - 0$ のときの極限を調べよ.

2 数列 a_1, a_2, \dots を

$$a_n = \frac{2n+1C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める.

(1) $n \geq 2$ とする. $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\frac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geq 1$ と分子 q_n を求めよ.

(2) a_n が整数となる $n \geq 1$ をすべて求めよ.

3 放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 1$ をみたす部分を C とする. 座標平面上の原点 O と点 $A(1, 0)$ を考える. $k > 0$ を実数とする. 点 P が C 上を動き, 点 Q が線分 OA 上を動くとき,

$$\vec{OR} = \frac{1}{k}\vec{OP} + k\vec{OQ}$$

をみたす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする.

$S(k)$ および $\lim_{k \rightarrow +0} S(k)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k)$ を求めよ.

4 $a > 0$ とし,

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく. 次の2条件をみたす点 (a, b) の動きうる範囲を求め, 座標平面上に図示せよ.

条件1: 方程式 $f(x) = b$ は相異なる3実数解をもつ.

条件2: さらに, 方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である.

5 複素数平面上の原点を中心とする半径1の円を C とする. 点 $P(z)$ は C 上にあり, 点 $A(1)$ とは異なるとする. 点 P における円 C の接線に関して, 点 A と対称な点を $Q(u)$ とする. $w = \frac{1}{1-u}$ とおき, w と共役な複素数を \bar{w} で表す.

(1) u と $\frac{\bar{w}}{w}$ を z についての整式として表し, 絶対値の商 $\frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|}$ を求めよ.

(2) C のうち実部が $\frac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする. 点 $P(z)$ が C' 上を動くときの点 $R(w)$ の軌跡を求めよ.

6 座標空間内の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ を考える.

$\frac{1}{2} < r < 1$ とする. 点 P が線分 OA , AB , BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球 (内部を含む) が通過する部分を, それぞれ V_1, V_2, V_3 とする.

(1) 平面 $y = t$ が V_1, V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ. さらに, この範囲の t に対し, 平面 $y = t$ と V_1 の共通部分および, 平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ.

(2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ.

(3) r は (2) の条件をみたすとする. V_1 の体積を S とし, V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする. V_1, V_2, V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ.

(4) ひきつづき r は (2) の条件をみたすとする. S と T を求め, V の体積を決定せよ.