

東京大学

数学

問題

2017年度入試

- 【学部】 教養学部、理学部、工学部、農学部、医学部、薬学部
- 【入試名】 前期日程
- 【試験日】 2月25日



「過去問ライブラリーは、(株) 旺文社が刊行する「全国大学入試問題正解」を中心とした過去問、研究・解答(解答・解説)を掲載しています。本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は、(株) 旺文社または各情報提供者に帰属します。本サービスに掲載の全部または一部の無断複製、配布、転載、譲渡等を禁止します。各設問に対する「研究・解答」は原則として旺文社が独自に作成したものを掲載しています。掲載問題のうち★印を付したものは、著作権法第67条の2第1項の規定により文化庁長官に裁定申請を行った上で利用しています。

裁定申請日 【2017年】 8/1 【2018年】 4/24、9/20 【2019年】 6/20

1 実数 a, b に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a \cos 2\theta + b \cos \theta$$

とし、 $0 < \theta < \pi$ で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos \theta - 1}$$

を考える。

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x = \cos \theta$ の整式で表せ。

(2) $g(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a, b についての条件を求めよ。また、条件をみたす点 (a, b) が描く図形を座標平面上に図示せよ。

2 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

(a) 最初に、点 P は原点 O にある。

(b) ある時刻で点 P が格子点 (m, n) にあるとき、その 1 秒後の点 P の位置は、隣接する格子点 $(m+1, n), (m, n+1), (m-1, n), (m, n-1)$ のいずれかであり、また、これらの点に移動する確率は、それぞれ $\frac{1}{4}$ である。

(1) 点 P が、最初から 6 秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ。

(2) 点 P が、最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。

3 複素数平面上の原点以外の点 z に対して、 $w = \frac{1}{z}$ とする。

(1) α を 0 でない複素数とし、点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき、点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち、虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め、複素数平面上に図示せよ。

4 $p = 2 + \sqrt{5}$ とおき、自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい。

(1) a_1, a_2 の値を求めよ。

(2) $n \geq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を、 a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

5 k を実数とし、座標平面上で次の 2 つの放物線 C, D の共通接線について考える。

$$C: y = x^2 + k$$

$$D: x = y^2 + k$$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき、 a を用いて k と b を表せ。ただし $a \neq -1$ とする。

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める。このとき、共通接線が 3 本存在することを示し、それらの傾きと y 切片を求めよ。

6 点 O を原点とする座標空間内で、一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また、点 $A(1, 0, 0)$ に対して、 $\angle AOP$ を θ とおく。ただし $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

(1) 点 Q が $(0, 0, 1)$ にあるとき、点 P の x 座標がとりうる値の範囲と、 θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動くとき、辺 OP が通過しうる範囲を K とする。 K の体積を求めよ。