

東京大学

数学

問題

2016年度入試

- 【学部】 教養学部、理学部、工学部、農学部、医学部、薬学部
- 【入試名】 前期日程
- 【試験日】 2月25日



「過去問ライブラリーは、(株) 旺文社が刊行する「全国大学入試問題正解」を中心とした過去問、研究・解答(解答・解説)を掲載しています。本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は、(株) 旺文社または各情報提供者に帰属します。本サービスに掲載の全部または一部の無断複製、配布、転載、譲渡等を禁止します。各設問に対する「研究・解答」は原則として旺文社が独自に作成したものを掲載しています。掲載問題のうち★印を付したものは、著作権法第67条の2第1項の規定により文化庁長官に裁定申請を行った上で利用しています。

裁定申請日 【2017年】 8/1 【2018年】 4/24、9/20 【2019年】 6/20

- 1 e を自然対数の底, すなわち $e = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ とする. すべての正の実数 x に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

- 2 A, B, C の3つのチームが参加する野球の大会を開催する. 以下の方式で試合を行い, 2連勝したチームが出た時点で, そのチームを優勝チームとして大会は終了する.
- (a) 1試合目で A と B が対戦する.
- (b) 2試合目で, 1試合目の勝者と, 1試合目で待機していた C が対戦する.
- (c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は, k 試合目の勝者と, k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する. ここで k は2以上の整数とする.

なお, すべての対戦において, それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で, 引き分けはないものとする.

- (1) n を2以上の整数とする. ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ.
- (2) m を正の整数とする. 総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき, A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ.
- 3 a を $1 < a < 3$ をみたす実数とし, 座標空間内の4点 $P_1(1, 0, 1)$, $P_2(1, 1, 1)$, $P_3(1, 0, 3)$, $Q(0, 0, a)$ を考える. 直線 P_1Q , P_2Q , P_3Q と xy 平面の交点をそれぞれ R_1 , R_2 , R_3 として, 三角形 $R_1R_2R_3$ の面積を $S(a)$ とする. $S(a)$ を最小にする a と, そのときの $S(a)$ の値を求めよ.

- 4 z を複素数とする. 複素数平面上の3点 $A(1)$, $B(z)$, $C(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め, 図示せよ.

- 5 k を正の整数とし, 10進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2 \cdots a_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

を1つとる. ここで, a_1, a_2, \dots, a_k は0から9までの整数で, $a_k \neq 0$ とする.

- (1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ.

$$0.a_1a_2 \cdots a_k \leq \sqrt{n} - 10^k < 0.a_1a_2 \cdots a_k + 10^{-k}$$

- (2) p が $5 \cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば, 次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ.

$$0.a_1a_2 \cdots a_k \leq \sqrt{m} - p < 0.a_1a_2 \cdots a_k + 10^{-k}$$

- (3) 実数 x に対し, $r \leq x < r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す. $\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = 0.a_1a_2 \cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ.

- 6 座標空間内を, 長さ2の線分 AB が次の2条件 (a), (b) をみたしながら動く.

- (a) 点 A は平面 $z = 0$ 上にある.
- (b) 点 $C(0, 0, 1)$ が線分 AB 上にある.

このとき, 線分 AB が通過することのできる範囲を K とする. K と不等式 $z \geq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ.