東京医科歯科大学 一般前期 医学部

平成25年度入学者選抜個別(第2次)学力検査問題

数　　学

(医　学　科)

注　意　事　項

1. 監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 問題冊子は，全部で8ページあります。
3. 解答用紙は，問題冊子と別に印刷されているので，誤らないように注意しなさい。
4. 解答用紙には，必ず解答の過程と結果を記入しなさい。
5. 解答は，必ず解答用紙の点線より左に記入しなさい。
6. 下書は，各問題の余白を利用し，なお不足する場合は，問題冊子の第1ページの表裏と第4ページの裏から第8ページの裏まで使用しなさい。ただし，切り離してはいけません。
7. 各解答用紙には，受験番号欄が2か所ずつあります。それぞれ記入を忘れないこと。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，机上に置き，持ち帰ってはいけません。この冊子は持ち帰りなさい。
9. 落丁または印刷の不鮮明な箇所があれば申し出なさい。

下　書　用　紙　(切り取ってはいけない)

$\boxed{1}$ 以下の各問いに答えよ。

(1) 実数 α, β が $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, $\tan\alpha\tan\beta = 1$ を満たすとき, $\alpha + \beta$ の値を求めよ。

(2) 実数 α, β, γ が $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき,

$$\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha$$

の値は一定であることを示せ。

(3) 実数 α, β, γ が $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき,

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$$

のとりうる値の範囲を求めよ。

2　2 次正方行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のうち，次の 3 条件(i),(ii),(iii)を満たすもの全体の集合を M とする。

(i)　a, b, c, d はすべて整数

(ii)　$b + c = 0$

(iii)　$a - b - d = 0$

また E を 2 次単位行列とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　行列 A, B がともに M の要素であるとき，それらの積 AB も M の要素であることを示せ。

(2)　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とその逆行列 A^{-1} がともに M の要素であるとき，$ad - bc = 1$ が成立することを示せ。

(3)　行列 A とその逆行列 A^{-1} がともに M の要素であるような A をすべて求めよ。

(4)　自然数 n について，M の要素であって $A^n = E$ を満たすような行列 A の全体の集合を S_n とする。S_n の要素の個数がちょうど 3 となる n をすべて求めよ。

3 m，n を自然数として，関数 $f(x)=x^m(1-x)^n$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を m，n を用いて表せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を m，n を用いて表せ。

(3) a，b，c を実数として，関数 $g(x)=ax^2+bx+c$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を $M(a,b,c)$ とする。次の2条件(i)，(ii)が成立するとき，$M(a,b,c)$ の最小値を m，n を用いて表せ。

(i) $g(0)=g(1)=0$

(ii) $0<x<1$ のとき $f(x) \leqq g(x)$

(4) m，n が2以上の自然数で $m>n$ であるとき

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!} > \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} > 2^{2n-1}$$

が成立することを示せ。