札幌医科大学　一般

数学問題紙

平成31年2月25日

自　　11：00

至　　12：40

答案作成上の注意

1. 数学の問題紙は1から5までの5ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの4枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

◇M2(279—14)

札幌医科大学

問題訂正

「数学」

3ページ $\boxed{2}$

(1)と(2)の間の説明文

(誤)

……三角形PQRの重心と三角形PRSの重心を$S_{PRS}:S_{PQR}$に内分…….

また，三角形 PQS の重心と三角形 QRS の重心を $S_{QRS}:S_{PQS}$ に内分……

(正)

……三角形 PQR の重心 K と三角形 PRS の重心 L を結ぶ線分 KL を $S_{PRS}:S_{PQR}$ に内分……. また，三角形 PQS の重心 M と三角形 QRS の重心 N を結ぶ線分 MN を $S_{QRS}:S_{PQS}$ に内分……

1 次の各問に答えよ.

(1) 一辺の長さが a である正八面体の体積を a を用いて表せ.

(2) a を定数とする. このとき $a \leqq x \leqq a+1$ の範囲で定義された関数 $f(x)=|x^2-1|$ の最大値が 1 であるような a の条件を求めよ.

(3) (i) n を自然数とする. 2^n が 4 桁の数になるときの n を求めよ.

(ii) 5^{130} は何桁の数か.

2 四面体OABCにおける4つの辺OA，AB，BC，OC上にそれぞれ点P，Q，R，Sをとる．ただし，$0 < s < 1$，$0 < t < 1$に対して，

辺OAを$s : (1-s)$に内分する点をP

辺OCを$s : (1-s)$に内分する点をS

辺ABを$(1-t) : t$に内分する点をQ

辺BCを$t : (1-t)$に内分する点をR

とする．

(1) 4点P，Q，R，Sが同一平面上にあることを示せ．

三角形XYZの面積をS_{XYZ}と表すものとする．三角形PQRの重心と三角形PRSの重心を$S_{\mathrm{PRS}} : S_{\mathrm{PQR}}$に内分する点をGとする．また，三角形PQSの重心と三角形QRSの重心を$S_{\mathrm{QRS}} : S_{\mathrm{PQS}}$に内分する点をG′とする．

(2) GとG′が一致することを示せ．

(3) 3点O，B，Gを通る平面はACの中点を通ることを示せ．

3 次の各問に答えよ.

(1) Nを0以上の整数とするとき，2^Nを3で割った余りを求めよ.

(2) nを自然数，aを$0 < a < 1$をみたす実数とする．表か裏のどちらかが必ず出るコインがあり，このコインの表が出る確率をaとする．このコインを投げる試行をn回繰り返すとき，第i回目の試行($i = 1, 2, \cdots, n$)において，表が出たときに$x_i = 0$，裏が出たときに$x_i = 1$と定め，n回の試行の結果，x_1，x_2，$\cdots$，x_nから得られる0以上の整数Xを

$$X = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} x_i$$

と定める．Xが3の倍数となる確率をp_nとする.

(i) $a = \dfrac{1}{2}$とするとき，p_nをnを用いて表せ.

(ii) p_1，p_2，p_3，p_4をそれぞれaの多項式で表せ．ただし，多項式は展開して答えること.

(iii) aが0から1の範囲を動くとき，p_2とp_4の最小値をそれぞれ求めよ.

4 定数 $a>0$ に対して，次の媒介変数表示された座標平面上の曲線を C とする：

$$x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta) \qquad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

(1) 曲線 C の長さを a を用いて表せ.

C 上の点 $\mathrm{A}(a(\theta-\sin\theta),\ a(1-\cos\theta))$ において，$0<\theta<2\pi$ では法線上に点Bを線分ABの長さが1で，Bの y 座標がAの y 座標より大きくなるようにとり，Aの座標が $(0,0)$，$(2\pi a, 0)$ のときのBはそれぞれ $(-1,0)$，$(2\pi a+1, 0)$ とする.

(2) 点Bの座標を a と θ を用いて表せ.

(3) 点Aが曲線 C 上を $\theta=0$ から $\theta=2\pi$ まで動いたときの点Bの軌跡を C_1 とするとき，曲線 C_1 の長さを a を用いて表せ.