札幌医科大学

数学問題紙

平成30年2月25日

自　11：00

至　12：40

答案作成上の注意

1. 数学の問題紙は1から5までの5ページである。
2. 解答用紙は③から⑥までの4枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

◇M2(458—13)

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．

(1) 実数 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ に対して

$$x + y^2 = y + z^2 = z + x^2$$

が成り立つとする．このとき $x = y = z$ であることを証明せよ．

(2) x を実数とする．このとき，実数全体からなる集合の 2 つの部分集合

$$P(x) = \{y \mid t^2 + xt + |y| = 0 \text{ をみたす実数 } t \text{ が存在する}\}$$

$$Q(x) = \{y \mid \text{すべての実数 } t \text{ に対して } xt^2 + yt + 1 > 0 \text{ が成り立つ}\}$$

を考える．このとき $P(x) \subset Q(x)$ が成り立つための x に関する必要十分条件を求めよ．

(3) $a > 0$ とし，点 $P(x,\ y)$ は，y 軸からの距離 d_1 と点 $(2,\ 0)$ からの距離 d_2 が $ad_1 = d_2$ をみたすものとする．a が次の値のとき，点 $P(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

(ア) $a = \dfrac{1}{2}$　　(イ) $a = 1$　　(ウ) $a = 2$

2 座標平面において2点 $A\left(\cos\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(\cos\frac{\pi}{6},\ -\sin\frac{\pi}{6}\right)$ をとる．また，θ を $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ をみたす実数とし，x 軸の正の向きとなす角が θ であるような原点を端点とする半直線を ℓ_θ とする．各 θ において，半直線 ℓ_θ 上を動く点 P の中で，$AP + PB$ の値が最小となるような P を P_θ と定める．以下の各問に答えよ．

(1) 三角形 OAB の外接円の半径を求めよ．

(2) θ が次の条件をみたすとき，P_θ の座標を求めよ．

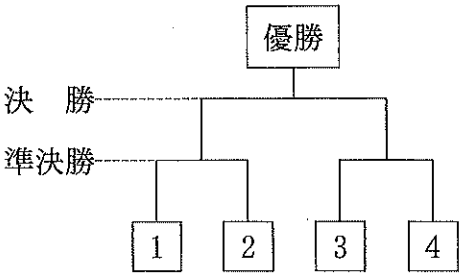
(ア) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6}$ (イ) $\theta = \frac{\pi}{2}$

(3) $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるとき，ℓ_θ に関して A と対称な点 A_θ の座標を求めよ．

(4) $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるとき，$\angle AP_\theta B$ を求めよ．

(5) θ が $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ を動くとき，P_θ の描く曲線で囲まれる部分の面積を求めよ．

3 A, B, C, Dの4人が，右のトーナメント表の$\boxed{1}$から$\boxed{4}$枠に割り振られた後に試合を行う．ただし4人が$\boxed{1}$から$\boxed{4}$枠に割り振られる確率は等しいものとする．試合ではAが最も強く，以下，B, Cの順に弱くなっていき，Dが最も弱い．自分より弱い人と対戦した際に勝つ確率をpとする．ただし，$\dfrac{1}{2} < p < 1$である．また，この試合に「引き分け」は存在せず，必ず勝敗が決するものとする．



A, B, C, Dそれぞれが優勝する確率をそれぞれp_A, p_B, p_C, p_Dとする．以下の各問に答えよ．

(1) 準決勝で「A 対 B」の対戦が実現する確率を求めよ．

(2) Bが準決勝で勝つ確率をpを用いて表せ．

(3) p_Bをpを用いて表せ．

(4) p_Cをpを用いて表せ．

(5) p_A, $2p_B$, $3p_C$を比較したとき，$2p_B$が最も大きくなるpに関する条件を求めよ．

$\boxed{4}$ $a > 0$とする．座標平面において点$(2a,\ 0)$から曲線$C : y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$に引いた接線を$\ell$とする．この接点の$x$座標を$b$とし，$\ell$と$y$軸の交点の座標を$(0,\ c)$とする．また，直線$\ell$と曲線$C$および直線$x = 2a$で囲まれる部分を$S$とし，直線$\ell$と曲線$C$および直線$y = c$で囲まれる部分を$T$とする．以下の各問に答えよ．

(1) bとcをaを用いて表せ．

(2) SとTの面積を求めよ．

S，Tを直線$x = b$のまわりに1回転してできる立体の体積をそれぞれU，Vとする．また，Tを直線$y = \dfrac{1}{b}$のまわりに1回転してできる立体の体積をWとする．

(3) U，V，Wをaを用いて表せ．

(4) UとVの大小関係を求めよ．必要であれば$2^{10} < e^7$であることを用いてよい．ただしeは自然対数の底である．