

札幌医科大学 一般

数学問題紙

平成 29 年 2 月 25 日

自 11 : 00

至 12 : 40

答案作成上の注意

1. 数学の問題紙は 1 から 5 までの 5 ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの 4 枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

問題訂正

「数学」

3 ページ 2 (2)

上から 1 行目

下線部を追加

(誤)

.....どのくらいの大きさなのかを調べたい. $|z_n - 10^p|$ の値が.....

(正)

.....どのくらいの大きさなのかを調べたい. $n=m_1$ のとき $|z_n - 10^p|$ の値が.....

1 次の各問に答えよ.

(1) 座標空間において, xy 平面上に原点を中心とする半径 1 の円に内接する正六角形 ABCDEF がある. 六角錐 P-ABCDEF において, 頂点 P の座標を $P(0, 0, a)$ ($a > 0$) とする. $\angle APB = 45^\circ$ であるとき, a の値と, 六角錐 P-ABCDEF の体積をそれぞれ求めよ.

(2) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) とする.

(i) 不等式 $\int_1^{2^{n+1}} \frac{1}{x} dx < 2a_n$ が成り立つことを示せ.

(ii) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\log n}$ を求めよ.

(3) 5進法で表された 2 つの数 $123_{(5)}$ と $24_{(5)}$ の積を 5進法で表せ.

2 i を虚数単位とし、 α と β を複素数で $\alpha \neq 0$ 、 $\beta = 1 + ti$ ($t > 0$) とする。このとき、数列 $\{z_n\}$ を次で定義する。

$$z_1 = \alpha,$$

$$z_{n+1} = \beta z_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

以下の各問に答えよ。

(1) 複素数平面において原点を O とし、 z_n を表す点を P_n とする。三角形 $OP_n P_{n+1}$ の面積を a, t, n を用いて表せ。

$\alpha = -1 + \sqrt{3}i$ 、 $t = \tan \frac{5}{12}\pi$ とする。 z_n が正の実数となる番号 n を小さいほうから順に m_1, m_2, m_3, \dots とする。

(2) $n = m_1$ のとき z_n がどのくらいの大きさなのかを調べたい。 $|z_n - 10^p|$ の値が最小となる自然数 p を求めよ。

(3) 数列 $\{m_k\}$ の一般項を k を用いて表せ。

3 3gのおもり1個が片方の皿にのっているてんびんと、無数に用意された1g, 2g, 3gのおもりがある。以下の2つのルールに基づいて、てんびんの皿におもりを1個ずつのせる試行を行う。

1. てんびんが釣り合っていないときには、総重量が軽い方の皿に1g, 2g, 3gのおもりを無作為に1個選んでのせる。それぞれのおもりが選ばれる確率は $0 < a < 1$ として $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $1 - a$ である。
2. てんびんが釣り合った時点で試行をやめる。

n 回目の試行の結果、てんびんが釣り合っていない確率を p_n 、てんびんが釣り合って試行が終了する確率を q_n とすると、以下の各問に答えよ。

(1) p_1 と p_2 をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) p_n の一般項を a と n を用いて表せ。

(3) q_n の一般項を a と n を用いて表せ。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} nq_n$ を求めよ。

4 $x > 0$ に対して、連続関数 $f(x)$ は、等式

$$f(x) = 2 \log x - \int_1^e tf(t) dt$$

をみたすものとする。また、曲線 $y = f(x)$ の接線のうち、原点を通るものを l とし接点を (u, v) とする。以下の各問に答えよ。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) 接点 (u, v) を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ 、直線 l および x 軸で囲まれる領域を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。