

札幌医科大学 一般

# 数 学 問 題 紙

平成 24 年 2 月 25 日

自 11 : 00

至 12 : 40

## 答 案 作 成 上 の 注 意

1. 数学の問題紙は 1 から 5 までの 5 ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの 4 枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

札幌医科大学 一般

# 問題訂正

校正にミスがありましたので、次のとおり訂正します。

## 数学

訂正箇所	3ページ 問題 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span> 9行目
誤	…と書く。
正	…と書く。ただし $k$ は自然数とする。

# 問題訂正 ②

校正にミスがありましたので

次のとおり訂正します。

数学

訂正箇所	3 ページ 問題 ② 12 行目
誤	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 q^n = 0$
正	$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 q^t = 0$

1 全ての面が合同な三角形である四面体 OABC を考える. この四面体について

$$OA = \sqrt{3}, \quad OB = 2, \quad OC = \sqrt{5}$$

とする.

(1) 内積  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ ,  $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$ ,  $\vec{OC} \cdot \vec{OA}$  をそれぞれ求めよ.

(2) 点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線を OH とするとき,  $\vec{OH}$  を  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$  を用いて表せ.

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ.

2 箱の中に 1, 2, 3 の数字が書かれたカードが 1 枚ずつ, 合計で 3 枚入っている. また箱の外に 1 が書かれたカードを 2 枚, 2 が書かれたカードを 1 枚用意しておく. いま, 箱の中からカードを 1 枚取り出し, 外にあるカード 1 枚と交換して箱に戻すという試行を考える. ただし, 交換は以下のルールで行う.

- ・取り出されたカードが 1 の場合は, 交換せずに箱に戻す.
- ・それ以外の場合は, 取り出したカードに書かれている数より 1 小さい数の書かれているカードと交換し, 箱に戻す.

第  $k$  回目の試行の後に, 箱の中のカードに書かれてある数字が, 1,  $m$ ,  $n$  (ただし  $1 \leq m \leq n \leq 3$  とする) となる確率を  $p_{1,m,n}(k)$  と書く.

(1)  $p_{1,1,2}(k)$  および  $p_{1,1,3}(k)$  を  $k$  を用いて表せ.

(2)  $0 < q < 1$  に対して  $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$  および  $\sum_{k=1}^{\infty} k^2q^{k-1}$  を  $q$  を用いて表せ. ただし  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2q^n = 0$  であることは用いてよい.

(3) 箱の中のカードに書かれてある数字が, 第  $k$  回目の試行の後で初めて全て 1 となる確率を  $r_k$  とする. このとき  $\sum_{k=1}^{\infty} kr_k$  を求めよ.

**3**  $a, b, p, q$  を実数(ただし  $p \neq 0$ ) とし, 行列  $X$  を

$$X = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p^{-1} \end{pmatrix}$$

で定義する. また, 命題  $P(a, b)$  を「 $X^2 - aX + bE = O$  をみたす  $p$  と  $q$  が存在する」とする. ただし  $E$  は 2 次の単位行列,  $O$  は 2 次の零行列とする.

(1) 命題  $P(a, b)$  が真となる条件を  $a$  と  $b$  を用いて表せ.

(2)  $n$  を自然数としたとき, 命題  $P(a, b)$  が真となる整数の組  $(a, b)$  で,  $|a| \leq n$  かつ  $|b| \leq n$  となるものの個数を,  $n$  を用いて表せ.

4  $a$  を実数とする. また, 関数  $f(x)$  を  $x > 1$  の範囲において

$$f(x) = x^{-a} \{ \log(x+1) - \log(x-1) \}$$

で定義する.

(1) 関数  $f(x)$  が単調減少であるための  $a$  の条件を求めよ.

(2) 級数  $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$  が正の無限大に発散するような  $a$  の条件を求めよ.

③

数 学  
解 答 用 紙

受 験 番 号	
---------	--

1 の解答：

※採点欄  
(受験生は記入しないこと)



受 験 番 号	
---------	--

④

2 の解答：

※採点欄  
(受験生は記入しないこと)

⑤

数 学  
解 答 用 紙

受 験 番 号	
---------	--

3 の解答：

※採点欄  
(受験生は記入しないこと)

⑥

数 学

解 答 用 紙

受 験 番 号	
---------	--

4 の解答：

※採点欄  
(受験生は記入しないこと)