旭川医科大学

平成28年度一般入試前期日程

数　学　問　題　紙

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は，２ページあります。
3. 解答用紙は４枚，草案紙は１枚あります。
4. 受験番号は，監督者の指示に従って，全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙，草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$) とおく．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　$\tan x \leqq x+1-\frac{\pi}{4}\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}\right)$ が成り立つことを示せ．

問 2　$\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

問 3　I_n+I_{n+2} の値を n を用いて表せ．

問 4　問 3 までの結果を用いて，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ の和を求めよ．

問題 2　原点 O を中心とする単位円周上に A $(-1,0)$，B $(1,0)$，および $y>0$ を満たす動点 C (x,y) がある．$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とするとき，次の問いに答えよ．
ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする．

問 1　$\triangle$ABC の面積を θ を用いて表せ．

問 2　$\triangle$ABC の内接円 O_1 の半径 r_1 を θ を用いて表せ．

問 3　x 軸，辺 AC の延長線，および辺 BC とそれぞれ接する円 O_2 を考える．x 軸上の接点を D，辺 AC の C 側の延長上の接点を E，そして辺 BC 上の接点を F とする．

(1)　AD の長さを θ を用いて表せ．

(2)　円 O_2 の半径 r_2 を θ を用いて表せ．

(3)　円 O_1 の中心を I，円 O_2 の中心を J とする．$\frac{r_2}{r_1}=2$ となるとき，$\triangle$OIJ の面積を求めよ．

問題 3　a を正の実数とする．点 P は曲線 $C_a : y = e^{ax}$ 上を，点 Q は直線 $y = x$ をそれぞれ動く．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　曲線 C_a と直線 $y = x$ が共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ．

問 2　問 1 で求めた範囲にある a に対して，線分 PQ の長さの最小値を $d(a)$ とする．PQ の長さが $d(a)$ となる曲線 C_a 上の点を P_a とする．

(1)　$d(a)$ を求めよ．

(2)　点 P_a における曲線 C_a の接線の傾きを求めよ．

(3)　a が問 1 で求めた範囲を動くときの点 P_a の軌跡を求め，その概形を図示せよ．

問 3　$d(a)$ の最大値と，そのときの a の値を求めよ．

問題 4　A の袋には赤玉 5 個，白玉 1 個が入っている．B の袋には赤玉 2 個，白玉 2 個が入っている．この 2 つの袋は見た目では区別できないものとする．このとき，次の確率を求めよ．

問 1　2 つの袋からそれぞれ 2 個ずつ，合計 4 個の玉を取り出すとき，赤玉が 3 個以上である確率

問 2　どちらか一方の袋を選んで 1 個の玉を取り出すとき，それが赤玉である確率

問 3　どちらか一方の袋を選んで 2 個の玉を取り出すとき，1 個でも白玉があれば「袋 B を選んだ」と判断する．袋 A を選んで取り出したときに「袋 B を選んだ」と判断してしまう確率