

旭川医科大学

平成 26 年度一般入試前期日程

数 学 問 題 紙

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は、2 ページあります。
3. 解答用紙は 4 枚、草案紙は 1 枚あります。
4. 受験番号は、監督者の指示に従って、全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙、草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1 関数 $f(x) = \log(1+x^2)$ について、次の問いに答えよ.

問 1 $\int_0^1 \log(1+x^2) dx$ を求めよ.

問 2 導関数 $f'(x)$ の増減を調べ、 $y = f'(x)$ のグラフの概形をかけ.

問 3 曲線 $C: y = f(x)$ と曲線 C の互いに直交している 2 本の接線とで囲まれる図形の面積 S を求めよ.

問題 2 $0 < a \leq \frac{\pi}{2}$ とし、曲線 $y = 1 - \cos x$ ($0 \leq x \leq a$) を C とする.

$0 < t < a$ とし、原点と C 上の点 $(t, 1 - \cos t)$ を通る直線を l とおくと、次の問いに答えよ.

問 1 曲線 C と直線 l とで囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ 、 $t \leq x \leq a$ の範囲で C と l と直線 $x = a$ とで囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とおくと、 $S_1(t) + S_2(t)$ を求めよ.

問 2 $S_1(t) + S_2(t)$ を最小とする t の値を t_0 とするとき、 t_0 を a を用いて表せ.

問 3 $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{S_1(t_0) - S_2(t_0)}{a^3}$ を求めよ.

ただし、 $a - \frac{a^3}{3!} < \sin a < a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!}$ ($a > 0$) は用いてよい.

問題 3 a を正の定数とする. $AB = a$, $AC = 2a$, $\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$ である $\triangle ABC$ と, $|2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}| = a$ を満たす動点 P がある. このとき, 次の問いに答えよ.

問 1 辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とするとき, $|\overrightarrow{AD}|$ を求めよ.

問 2 $|\overrightarrow{AP}|$ の最大値を求めよ.

問 3 線分 AP が通過してできる図形の面積 S を求めよ.

問題 4 一列に並んだ 3 つの部屋 A , B , C があり, 2 頭の象がいる. 2 頭の象は毎日 1 つの部屋から隣の部屋に, 次のルールに従って移動する.

$0 < p < 1$ とし, 象が部屋 A と部屋 B にいるとき, 部屋 A にいる象は部屋 A に留まり, 部屋 B にいる象が確率 p で部屋 C に移る. 象が部屋 B と部屋 C にいるとき, 部屋 C にいる象は部屋 C に留まり, 部屋 B にいる象が確率 $1-p$ で部屋 A に移る. 象が部屋 A と部屋 C にいるとき, 部屋 A にいる象が確率 p で部屋 B に移り, 移らない場合は部屋 C にいる象が部屋 B に移る. 2 頭の象が同時に同じ部屋にいることはできない.

はじめに 2 頭の象はそれぞれ部屋 A と部屋 B にいるものとし, $2n$ 日後に象が部屋 A にいる確率を a_n ($n = 1, 2, \dots$) とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

問 1 a_1 を求めよ.

問 2 a_{n+1} を a_n を用いて表せ.

問 3 $p = \frac{2}{3}$ のとき, a_n を求めよ.