新潟大学　一般前期

平成24年度入学試験問題

数　学（理，医，歯，工学部）

注 意 事 項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で5ページある。（落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。）

別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された2箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科により解答すべき問題（○印），解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部，学科	解答すべき問題（○印）					解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部（数学科，物理学科）及び工学部	○	○	○	○	○	5枚	120分
理学部（化学科，生物学科，自然環境科学科）及び医学部（保健学科）	○	○	○	○		4枚	90分
医学部（医学科）及び歯学部		○	○	○	○	4枚	90分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

1 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって定められる点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ に移す移動を考える。ここで，a は実数とする。楕円 $C : x^2 + 4y^2 = 1$ が与えられているとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が楕円 C 上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ は円 $D : X^2 + Y^2 = 1$ 上を動くとする。このとき a の値を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が楕円 C 上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ は直線 $l : Y = pX + q$ 上を動くとする。ただし p，q は実数とする。このとき a および p，q の値を求めよ。

(3) (2)において，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が楕円 C 上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ の X の最大値，最小値を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(1) k, n は不等式 $k \leqq n$ を満たす自然数とする。このとき,

$$2^{k-1}n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1) \leqq n^k k!$$

が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 n に対して, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。

(3) $\dfrac{9}{19} < \log_{10} 3 < \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$ a を実数とし，xy 平面上において，２つの放物線

$$C : y = x^2,\ D : x = y^2 + a$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) p，q を実数として，直線 $l : y = px + q$ が C に接するとき，q を p で表せ。

(2) (1)において，直線 l がさらに D にも接するとき，a を p で表せ。

(3) C と D の両方に接する直線の本数を，a の値によって場合分けして求めよ。

$\boxed{4}$ 箱の中に1から9までの異なる整数が1つずつ書かれたカードが9枚入っている。「箱からカードを1枚引き，カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を3回繰り返す。記録された3つの整数の最小値を m，最大値を M とする。次の問いに答えよ。

(1) $5 < m$ となる確率および $M < 5$ となる確率を求めよ。

(2) $m \leqq 5 \leqq M$ となる確率を求めよ。

(3) $k = 1, 2, \cdots\cdots, 9$ に対して，$m \leqq k \leqq M$ となる確率を $p(k)$ とする。$p(k)$ の最大値，最小値を求めよ。

5 次の問いに答えよ。

(1) 実数 $x \geqq 0$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqq \log(1+x) \leqq x$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x)\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n$ を求めよ。

◇M3(057—47)