愛媛大学

数学

問題

2019年度入試

【学部】 教育学部、理学部、医学部、工学部、農学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

【試験時間】 理・工（理型）・医学部は120分，他は100分

【問題解答前の確認事項】

〔入試科目〕　Ⓐ 理・工（理型）学部，Ⓑ 医学部は数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A（場 図 整）・B（列 ベ），Ⓒ 教育（学校教育〈中等教育―数学・理科・技術〉）学部は数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A（場 図 整）・B（列 ベ）と他教科との選択，Ⓓ 農・工（文理型）は数Ⅰ・Ⅱ・A（場 図 整）・B（列 ベ），Ⓔ 教育（学校教育〈中等教育―数学・理科・技術〉を除く）学部は数Ⅰ・Ⅱ・A（場 図 整）・B（列 ベ）と他教科との選択

〔注意〕　Ⓐは4～8の5問，Ⓑは5～9の5問，Ⓒは1，3，4，5の4問，Ⓓ・Ⓔは1，2，4，5の4問を解答すること．

1 次の問いに答えよ．

(1) $\log_{10} 12$，$\log_{10} \dfrac{1}{18}$ をそれぞれ $\alpha = \log_{10} 2$，$\beta = \log_{10} 3$ を用いて表せ．

(2) $\tan \dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ．

(3) $1 \leqq a \leqq b \leqq 100$ を満たす整数 a，b の組の個数を求めよ．

(4) t を実数とし，$f(x) = x^2 - 3x + 2$ とする．放物線 $y = f(x)$ 上の2点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(t+1,\ f(t+1))$ における接線をそれぞれ l_1，l_2 とする．接線 l_1，l_2 が直交するように t の値を定め，そのときの l_1，l_2 の交点の座標を求めよ．

(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^2 |x(x-1)|\,dx$ を求めよ．

2 a を実数とし，

$$f(x) = x^2 + 2x + 6, \quad g(x) = -x^2 + 2ax - 4a$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) (i) 関数 $y = f(x)$ の最小値を求めよ．

(ii) 関数 $y = g(x)$ の最大値を求めよ．

(iii) すべての実数 s，t に対して $f(s) \geqq g(t)$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

(2) (i) すべての実数 s に対して $f(s) \geqq g(s)$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

(ii) $-1 \leqq s \leqq 1$ を満たすすべての実数 s に対して $f(s) \geqq g(s)$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

3 曲線 $y = \log x$ 上に点 $\mathrm{A}(s,\ \log s)$ と点 $\mathrm{B}(t,\ \log t)$ をとる．ただし，s，t は $0 < s < t$ を満たす実数とする．線分 AB の中点が点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{4},\ 0\right)$ であるとする．次の問いに答えよ．

(1) $s + t$ および st の値を求めよ．

(2) 点 A，B の座標を求めよ．

(3) 関数 $f(x) = x \log x - x$ を微分せよ．

(4) 曲線 $y = \log x$ と線分 AB で囲まれた図形の面積を求めよ．

4 1辺の長さが1の正三角形 OAB がある．$0 < s < 1$ を満たす実数 s に対し，$\mathrm{OM} = \mathrm{ON} = s$ となる点 M，N をそれぞれ辺 OA，OB 上にとり，AN と BM の交点を P とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \quad \angle\mathrm{APB} = \theta$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ．

(2) (i) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，s を用いて表せ．

(ii) $\cos\theta$ を s を用いて表せ．

(iii) $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ が直交するとき，s の値を求めよ．

(3) (i) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，s を用いて表せ．

(ii) 直線 OP と辺 AB の交点を Q とする．点 P が OQ の中点であるとき，s の値を求めよ．

5 1から20までの整数が1つずつ書かれた20枚のカードがある．以下の手順に従って，整数 T_1，T_2，T_3，$\cdots$ を順次定める．

① 1枚のカードを取り出し，書かれている数を T_1 とし，取り出したカードをもとに戻す．

② 1枚のカードを取り出し，書かれている数を T_1 にかけた値を T_2 とし，取り出したカードをもとに戻す．同様に，$n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ に対して，1枚のカードを取り出し，書かれている数を T_{n-1} にかけた値を T_n とし，取り出したカードをもとに戻す．

自然数 n に対し，T_n が素数である確率を a_n とし，T_n が素数2個（同じ素数でもよい）の積である確率を b_n とする．なお，1は素数ではない．

次の問いに答えよ．

(1) a_1，b_1 を求めよ．

(2) a_2，b_2 を求めよ．

(3) a_n を n の式で表せ．

(4) b_n を n の式で表せ．

6 次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $x^2-4x-4 \leqq -2|x-1|$ を解け．

(2) 関数 $f(x)=\log(\log x)$ の $x=e^2$ における微分係数 $f'(e^2)$ を求めよ．

(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}$ とおくとき，極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を求めよ．

(4) 極限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-2x}-\sqrt{3+2x}}{x}$ を求めよ．

7 $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で定義された関数 $f(x)=\sin x-\sin^2 x$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減を調べよ．

(3) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，2つの曲線 $y=\sin x$ と $y=\sin^2 x$ で囲まれた図形を D とする．

(i) D の面積 S を求めよ．

(ii) D を x 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積 V を求めよ．

8 複素数平面上の3点 O(0)，P(z_1)，Q(z_2) をとる．ここで

$$z_1=2-\sqrt{3}i,\quad z_2=5+\sqrt{3}i$$

とする．ただし，i は虚数単位である．次の問いに答えよ．

(1) $|z_1|$，$|z_2|$ を求めよ．

(2) $\frac{z_2}{z_1}$ および $\angle$POQ を求めよ．

(3) O を中心に P，Q をそれぞれ角 $\frac{\pi}{6}$ だけ回転させた点を P$'$($z_1{}'$)，Q$'$($z_2{}'$) とする．

(i) $z_1{}'$，$z_2{}'$ を求めよ．

(ii) 線分 OQ と P$'$Q$'$ の交点を R(w) とする．w を求めよ．

(iii) △OPQ と △OP$'$Q$'$ の重なる部分の面積 S を求めよ．

9 1辺の長さが1の立方体がある．立方体の頂点 P と Q に対し，線分 PQ の長さが1であるとき，Q を P と隣接する頂点という．

立方体上に，次の規則に従って位置が決まる点が1つある．その点を動点とよぶことにする．

① 時刻 $t=0$ において，動点は立方体のある頂点にいる．その頂点を O で表す．

② n を0以上の整数とする．時刻 $t=n+1$ において，動点は時刻 $t=n$ のときにいた頂点 P に $\frac{1}{4}$ の確率で留まるか，もしくは P と隣接する3つの頂点のいずれかへそれぞれ $\frac{1}{4}$ の確率で移る．

次の問いに答えよ．

(1) 時刻 $t=2$ において動点が O と隣接する頂点にいる確率を求めよ．

(2) 時刻 $t=3$ において動点が O と隣接する頂点にいる確率を求めよ．

(3) 時刻 $t=4$ において動点が O と隣接する頂点にいる確率を求めよ．

(4) 時刻 $t=5$ において動点が O と隣接する頂点にいる確率を求めよ．