愛媛大学

数学

問題

2018年度入試

【学部】 教育学部、理学部、医学部、工学部、農学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

【問題解答前の確認事項】

〔入試科目〕　Ⓐ 理・工（社会デザインを除く）学部，Ⓑ 医学部は数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A（場 図 整）・B（列 ベ），Ⓒ 教育（学校教育〈中等教育—数学・理科・技術〉）学部は数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A（場 図 整）・B（列 ベ）と他教科との選択，Ⓓ 農・工（環境建設工〈社会デザイン〉）は数Ⅰ・Ⅱ・A（場 図 整）・B（列 ベ），Ⓔ 教育（数学・理科・技術を除く）学部は数Ⅰ・Ⅱ・A（場 図 整）・B（列 ベ）と他教科との選択．

〔注意〕　Ⓐ は 4 ～ 8 の 5 問，Ⓑ は 5 ～ 9 の 5 問，Ⓒ は 1，3，4，5 の 4 問，Ⓓ・Ⓔ は 1，2，4，5 の 4 問を解答すること．

1 次の問いに答えよ．

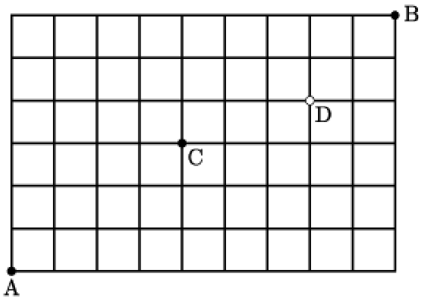
(1) 1254 と 4788 の最小公倍数を求めよ．

(2) 2^{2018} の桁数と 1 の位の数字を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(3) $90^\circ < \theta < 270^\circ$ で $\sin\theta = \dfrac{2}{7}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ を求めよ．

(4) 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ -1)$ と $\mathrm{B}(0,\ 1)$ について，線分 AB を $3:1$ に外分する点を中心とし，点 B を通る円の方程式を求めよ．

(5) 下図のように 7 本の平行な道とそれらに直交する 10 本の平行な道がある．地点 C を通るが地点 D を通らずに，地点 A から地点 B へ行く最短経路の総数を求めよ．



2 関数 $f(x)$ と $g(x)$ をそれぞれ次のように定義する．

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (|x| > 1) \\ 1 - x^2 & (|x| \leqq 1), \end{cases} \quad f(x) = \int_x^{x+1} g(t)\,dt$$

次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = g(x)$ のグラフを描け．

(2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ．

(3) $|x| \leqq 1$ の範囲で $f(x)$ を求めよ．

(4) $|x| \leqq 1$ の範囲で $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ．

3 曲線 $y = \sqrt{1 - 2x^2}\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を E とする．E 上の点 $(p,\ q)$ における接線を l とし，l の方程式を $y = ax + b$ とする．ただし，$0 < p < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．

次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = \sqrt{1 - 2x^2}$ を微分せよ．

(2) $a,\ b$ を p を用いて表せ．

(3) 変数変換 $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t$ を用いて，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 - 2x^2}\,dx$ を求めよ．

(4) 曲線 E，接線 l，x 軸で囲まれる図形と曲線 E，接線 l，y 軸で囲まれる図形の面積の和を $S(p)$ とする．

(i) $S(p)$ を求めよ．

(ii) $S(p)$ の最小値とそのときの p の値を求めよ．

4 四面体 OABC は，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OC} = 1,\quad \mathrm{OB} = 2,\quad \angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{AOC} = 60^\circ$$

を満たすとする．

$0 < s < 1$，$0 < t < 1$ を満たす実数 s，t に対し，辺 OC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，s，t を用いて表せ．

(3) 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が直交するとき，s を t を用いて表せ．

(4) 三角形 OQC の面積の最小値とそのときの t の値を求めよ．

5 袋に赤玉が4個入っている．AさんとBさんは，次の手順1から手順3までを1回の操作とし，この操作を反復する．ただし，Bさんの手元には白玉と赤玉がたくさんあるとする．

手順1　Aさんは袋から無作為に玉を1個取り出し，玉の色を確認せずに，Bさんにその玉をわたす．

手順2　Bさんは，Aさんから受け取った玉が白玉ならば赤玉に，赤玉ならば白玉に取り換えて袋にもどす．

手順3　Bさんは袋の中を確認し，すべての玉が同じ色ならば終了を宣言し，すべての操作を終了する．すべての玉の色が同じでなければ，手順1にもどる．

自然数 n に対して，操作が n 回行われ，かつ n 回目の操作後に袋の中の白玉の数が1個，2個，3個である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_1，q_1，r_1 および p_2，q_2，r_2 を求めよ．

(2) p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} を p_n，q_n，r_n を用いて表せ．

(3) ちょうど n 回目の操作で終了する確率 s_n を求めよ．

6 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=\log(\sin x)$ のグラフ $y=f(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{3\pi}{4},\ f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x)=xe^{-x^2}$ に対して，第2次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$ を求めよ．

(4) 条件 $|z-2-i|=1$ を満たす複素数 z に対して，$|z|$ の最小値を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

7 (1) p，q，r，α，β は複素数で，$p \neq q$，$\alpha \neq 0$ とする．p_1，q_1，r_1 を

$$p_1=\alpha p+\beta,\quad q_1=\alpha q+\beta,\quad r_1=\alpha r+\beta$$

と定義する．実数 t は $0<t<1$ を満たすとする．p，q，r が表す複素数平面上の点を，それぞれP，Q，Rとする．点Rが線分PQを $t:(1-t)$ に内分するとき，r_1 を p_1，q_1，t を用いて表せ．

(2) i を虚数単位とし，h を実数とする．複素数平面において，点 z が4点 0，1，$1+i$，i を頂点とする四角形の周を動くとき，

$$w=(-2+2i)z+hi$$

が表す点の描く線で囲まれた図形を D_h とする．

(i)　$-2+2i$ の絶対値と偏角を求めよ．ただし，偏角は0以上 2π 未満とする．

(ii)　D_0 の概形を描け．

(iii)　複素数平面における図形 A を

$$A=\{x+yi \mid x,\ y\text{は実数},\ -5 \leqq x \leqq 5,\ 4 \leqq y \leqq 6\}$$

と定義し，A と D_h の共通部分の面積を $S(h)$ とする．ただし，共通部分がない場合や，共通部分が線分や点の場合は，$S(h)=0$ とする．$S(h)$ の最大値とそのときの h の値を求めよ．

8 $x>0$ の範囲で関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - x\sin t|\,dt$$

と定義する．また，$x>0$ の範囲で関数 $g(x)$ は

$$\frac{\pi}{2}<g(x)<\pi,\quad \cos g(x)=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\quad \sin g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$x>0$ のとき，関係式

$$\cos t - x\sin t=\sqrt{1+x^2}\sin(t+g(x))$$

が成り立つことを示せ．

(2) すべての $x>0$ に対して $f(x)$ は

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}\int_{g(x)}^{\frac{\pi}{2}+g(x)} |\sin s|\,ds$$

と表せることを示せ．

(3) $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-1-x\ (x>0)$ を示せ．

(4) 関数 $f(x)\ (x>0)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

9 立方体の 8 個の頂点から無作為に 1 つの頂点を選ぶ作業を 4 回行って選んだ点を，それぞれ P_1，P_2，P_3，P_4 とする．以下の問いに答えよ．ただし，この問題では，三角形，四角形，立方体などの図形は，すべて境界とその内部からなるとする．

(1) 3 点 P_1，P_2，P_3 がすべて異なる確率を求めよ．

(2) 3 点 P_1，P_2，P_3 がすべて異なり，かつその 3 点を通る平面と立方体の共通部分が三角形になる確率を求めよ．

(3) 3 点 P_1，P_2，P_3 がすべて異なり，かつその 3 点を通る平面と立方体の共通部分が四角形になる確率を求めよ．ただし，P_1，P_2，P_3 が定める平面が立方体の一つの面を含む場合，その面を平面と立方体の共通部分とする．

(4) 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 が同一平面上にある確率を求めよ．ただし，4 点がすべて異なるとは限らないとする．