愛媛大学

数学

問題

2017年度入試

【学部】　教育学部、理学部、医学部、工学部、農学部

【入試名】　前期日程

【試験日】　2月25日

【問題解答前の確認事項】

〔入試科目〕　Ⓐ 理・工（社会デザインを除く）学部，Ⓑ 医学部は数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A (場 図 整)・B (列 ベ)，Ⓒ 教育（学校教育〈中等教育―数学・理科・技術〉）学部は数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A (場 図 整)・B (列 ベ) と他教科との選択，Ⓓ 農・工（環境建設工〈社会デザイン〉）は数Ⅰ・Ⅱ・A (場 図 整)・B (列 ベ)，Ⓔ 教育（数学・理科・技術を除く）学部は数Ⅰ・Ⅱ・A (場 図 整)・B (列 ベ) と他教科との選択．

〔注意〕　Ⓐ は 4 ～ 8 の 5 問，Ⓑ は 5 ～ 9 の 5 問，Ⓒ は 1，3，4，5 の 4 問，Ⓓ・Ⓔ は 1，2，4，5 の 4 問を解答すること．

1 次の問いに答えよ．

(1) 2 つの集合

$$A=\{x \mid x \text{ は整数，} 1 \leqq x \leqq 1000\}$$
$$B=\{x \mid x \text{ は } 30 \text{ と互いに素な自然数}\}$$

の共通部分 $A \cap B$ の要素の個数を求めよ．

(2) x，y を整数とするとき，次の式を満たす整数 a，b を x，y を用いて表せ．

$$\frac{4^x \times 6^{x+y} \times 12^{x-y}}{16^x \times 9^{2x-3y}} = 2^a \times 3^b$$

(3) 1 次不定方程式 $275x+61y=1$ のすべての整数解を求めよ．

(4) $\sin 75^\circ$ の値を求めよ．

2 放物線 $y=-x^2+x+2$ を C とし，C と x 軸との 2 つの交点を A，B とする．ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする．また，点 P は C 上を A から B まで動く．P が A，B と異なるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\triangle$PAB の面積が最大になるとき，P の座標および $\triangle$PAB の面積を求めよ．

(2) 放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする．$\triangle$PAB の面積が $\dfrac{S}{3}$ となる P の座標をすべて求めよ．

(3) 直線 $y=-2x+5$ を l とする．P と l の距離が最小になるとき，P の座標および P と l の距離を求めよ．

3 次の問いに答えよ．

(1) 複素数平面において，3 点 $\mathrm{A}(1+2i)$，$\mathrm{B}(3+4i)$，$\mathrm{C}(z)$ が正三角形の頂点となる複素数 z をすべて求めよ．ここで，i は虚数単位である．

(2) 2 つの関数

$$f(x)=2x+\sqrt{3}+4\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi),$$
$$g(x)=x+\sqrt{3}-2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

がある．2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および直線 $x=\pi$ で囲まれた部分を D とする．

(i) 関数 $y=f(x)$ および $y=g(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸を調べ，D を図示せよ．

(ii) D の面積 S を求めよ．

4 座標空間内に異なる 4 点 O，A，B，C がある．線分 OB，AB，AC，OC を $2:1$ に内分する点をそれぞれ K，L，M，N とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{KL}}=\overrightarrow{\mathrm{NM}}$ を示せ．

(2) p，q を実数とし，点 O，A，B，C の座標をそれぞれ $(0,\ 0,\ 0)$，$(4,\ 6,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(p,\ 3,\ q)$ とする．

(i) $\overrightarrow{\mathrm{KM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{LN}}$ を p，q を用いて成分で表せ．

(ii) 四角形 KLMN がひし形となるための必要十分条件を p，q の式で表せ．

(iii) 四角形 KLMN が正方形となる p，q を求めよ．

5 A，B，C の 3 人が以下の規則に従って試合を繰り返し行う．各試合において 2 人が対戦し，残りの 1 人は待機する．対戦ではどちらか一方が勝利し，引き分けはないものとする．

① 第 1 試合では，A と B が対戦し，C は待機する．

② 第 2 試合では，第 1 試合の勝者と C が対戦し，第 1 試合の敗者は待機する．

③ 同様に，第 $(n+1)$ 試合では，第 n 試合の勝者と第 n 試合で待機した者が対戦し，第 n 試合の敗者は待機する．

A と B が対戦したとき A が勝利する確率は $\frac{2}{3}$，B と C が対戦したとき B が勝利する確率は $\frac{1}{2}$，C と A が対戦したとき C が勝利する確率は $\frac{1}{3}$ である．第 n 試合において，A，B，C が待機する確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする．

(1) 次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ．

$$a_2 = \boxed{ア},\quad b_2 = \boxed{イ},\quad c_2 = \boxed{ウ}$$
$$c_3 = \boxed{エ}$$
$$a_{n+1} = \boxed{オ}\, b_n + \boxed{カ}\, c_n$$
$$b_{n+1} = \boxed{キ}\, a_n + \boxed{ク}\, c_n$$
$$c_{n+1} = \boxed{ケ}\, a_n + \boxed{コ}\, b_n$$

(2) $b_n - c_n$ を n の式で表せ．

(3) a_n を n の式で表せ．

(4) b_n を n の式で表せ．

6 次の問いに答えよ．

(1) 極限

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x} - x}{x+1}$$

を求めよ．

(2) $f(x) = \log_x 2 \ (x > 1)$ を微分せよ．

(3) 定積分

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \log x}$$

を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right) \right\}^{\frac{1}{n}}$$

であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log a_n$ を求めよ．

7 $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ とおく．ここで，i は虚数単位である．

(1) α の絶対値 $|\alpha|$ および偏角 θ を求めよ．ただし，θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(2) $\beta = 2\left(\cos\frac{2}{7}\pi + i \sin\frac{2}{7}\pi\right)$ とおき，β，$\alpha\beta$，$\alpha^2\beta$ に対応する複素数平面上の点をそれぞれ $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$ とする．このとき，$\triangle \mathrm{P_1P_2P_3}$ の面積を求めよ．

(3) $\gamma = -1 + 4\alpha$ とおき，γ，γ^2，γ^3 に対応する複素数平面上の点をそれぞれ $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$，$\mathrm{Q_3}$ とする．

(i) $\angle \mathrm{Q_2Q_1Q_3}$ を求めよ．

(ii) $\triangle \mathrm{Q_1Q_2Q_3}$ の面積を求めよ．

8 a を定数とし，

$$f(x) = x + a + 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$
$$g(x) = x + a - 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

とおく．2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれた部分を D とする．

(1) 関数 $y = f(x)$ および $y = g(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸を調べよ．さらに，$a = \sqrt{3}$ のとき，D を図示せよ．

(2) 曲線 $y = g(x)$ が x 軸と接しているとき，a の値を求めよ．このとき，D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

9 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^x}$ $(x>0)$ とおく.

(1) $f(x)$ を微分せよ.

(2) $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば, $a<\sqrt{3}$ であることを示せ.

(3) $\sqrt{3}^{\left(\sqrt{5}^{\sqrt{5}}\right)}$ と $\sqrt{5}^{\left(\sqrt{3}^{\sqrt{3}}\right)}$ の大小を比較せよ.