愛媛大学

数学

問題

2016年度入試

【学部】 教育学部、理学部、医学部、工学部、農学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

【問題解答前の確認事項】

〔入試科目〕　Ⓐ 理・工（社会デザインを除く）学部，Ⓑ 医学部は数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B (列 ベ)，Ⓒ 教育（学校教育〈中等教育─数学・理科・技術〉）学部は数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B (列 ベ) と他教科との選択，Ⓓ 農・工（環境建設工〈社会デザイン〉）学部は数Ⅰ・Ⅱ・A・B (列 ベ)，Ⓔ 教育（数学・理科・技術を除く）学部は数Ⅰ・Ⅱ・A・B (列 ベ) と他教科との選択.

〔注意〕　Ⓐ は 4 (1) (2) (4) (5)，5～8 の 5 問，Ⓑ は 4 (1) (2) (4) (5)，6～9 の 5 問，Ⓒ は 1，2，4 (1)～(3)，5 の 4 問，Ⓓ・Ⓔ は 1～3，5 の 4 問を解答すること.

1 次の問いに答えよ．

(1) $2m^2-n^2-mn-m+n=18$ を満たす自然数 m，n を求めよ．

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\log_{\cos\theta}\left(\tan^2\theta+\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{3}\right)=-2$ を満たす θ を求めよ．

(3) 袋の中に 1，2，3，4，5 の数字が 1 つずつ書かれた 5 個の玉が入っている．5 人が順にこの袋の中から玉を 1 個ずつ取り出し，玉に書かれた数字を記録する．この操作が終了したら，すべての玉を袋の中に戻し，同じ操作をもう一度行う．このとき，1 回目と 2 回目に取り出した玉に書かれた数字が同じであるという人がちょうど 3 人になる確率を求めよ．

(4) $1\leqq x\leqq 2$ とする．関数 $f(x)=\displaystyle\int_1^2|t-x|\,dt$ を最小にする x の値を求めよ．

2 放物線 $C\colon y=x^2+2ax+b$ について次の問いに答えよ．ただし，a，b は実数とする．

(1) 放物線 C 上の点 $(t,\ t^2+2at+b)$ を通る接線の方程式を求めよ．

(2) 平面上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から C に相異なる 2 本の接線 l_1，l_2 が引けるとする．

(i) p，q は $q<p^2+2ap+b$ を満たすことを示せ．

(ii) l_1 と l_2 が直交するとき，q を a と b を用いて表せ．

3 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が $a_1=0$，$b_1=1$ および

$$\begin{cases}a_{n+1}=a_n-b_n\\ b_{n+1}=a_n+3b_n+1\end{cases}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定められている．

(1) $c_n=a_n+b_n+1$ によって定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ．

(3) $d_n=\dfrac{a_n+1}{2^n}$ によって定められる数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}$ を求めよ．

4 $f(x)=xe^{-x}$ とし，関数 $y=f(x)$ のグラフを C_1 とする．また，C_1 を x 軸方向に $\log a$ だけ平行移動したグラフを C_2 とする．ただし，a は $a>1$ を満たす実数である．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減，極値を調べ C_1 の概形をかけ．なお，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$ であることを用いてよい．

(2) C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ．

(3) 原点を O とし，C_2 と x 軸の交点を A とする．$a=2$ のとき C_1，C_2 および線分 OA で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(4) 原点を O とし，C_2 と x 軸の交点を A とする．C_1，C_2 および線分 OA で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(5) (4) で求めた S に対して，$S<\dfrac{a-1}{a}$ が成り立つことを示せ．

5 空間内の 2 点 $\mathrm{A}(4,\ -2,\ 2)$，$\mathrm{B}(2,\ -4,\ 4)$ に対して，線分 AB を直径とする球 S の中心を C とする．

(1) 球 S の方程式を求めよ．

(2) xy 平面と平行な平面 α のうち S と α が交わってできる円の半径が最大となるような α の方程式を求めよ．

(3) 原点 O から最も近い S 上の点 D，および最も遠い点 E の座標をそれぞれ求めよ．

(4) (2) で求めた α と S が交わってできる円上を動く点 P に対して，$\triangle\mathrm{CDP}$ の面積を最大とする P の座標をすべて求めよ．ただし，D は (3) で求めた点である．

6 次の問いに答えよ．

(1) a，b を正の実数とする．楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる楕円が y 軸と直線 $y=x$ に接するような a，b を求めよ．

(2) 1 辺の長さが $\sqrt{n}$ の正 n 角形 $\mathrm{A_1A_2\cdots A}_n$ における三角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}$ の面積を S_n とする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ．

(3) a，b は実数で $a>0$ を満たすとする．放物線 $y=\dfrac{1}{2a^2}x^2$ と曲線 $y=\log x+b$ がただ 1 つの共有点 P をもつとき，P の座標および b を a を用いて表せ．

(4) $1\leqq x\leqq 2$ とする．関数 $f(x)=\displaystyle\int_1^2\frac{|t-x|}{t^2}\,dt$ を最小にする x の値を求めよ．

7 $f(x)=\dfrac{x}{2}$，$g(x)=x$，$h(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく．$x_0=1$ とし，2 枚の硬貨を繰り返して投げ，n 回目の事象により x_n を次のように定める．

$$x_n=\begin{cases} f(x_{n-1}) & (2\text{ 枚とも表のとき}) \\ g(x_{n-1}) & (1\text{ 枚が表，}1\text{ 枚が裏のとき}) \\ h(x_{n-1}) & (2\text{ 枚とも裏のとき}) \end{cases}$$

また p_n，q_n，r_n をそれぞれ $0<x_n \leqq \dfrac{1}{3}$ である確率，$\dfrac{1}{3}<x_n \leqq \dfrac{2}{3}$ である確率，$\dfrac{2}{3}<x_n \leqq 1$ である確率とする．

(1) すべての自然数 n に対して $0<x_n \leqq 1$ を示せ．

(2) p_1，q_1，r_1 を求めよ．

(3) p_n，q_n，r_n を p_{n-1}，q_{n-1}，r_{n-1} を用いて表せ．

(4) p_n-r_n を求めよ．

(5) p_n を求めよ．

8 z_0 を虚数単位 i と異なる複素数とする．複素数 z_n を

$$z_n=i+\frac{\sqrt{2}(z_{n-1}-i)(1+i)}{2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．

(1) すべての自然数 n に対し $z_n \fallingdotseq i$ であることを示せ．

(2) $\dfrac{z_n-i}{z_{n-1}-i}$ の絶対値 r と偏角 θ を求めよ．ただし，θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(3) $z_m=z_0$ となる最小の自然数 m を求めよ．

(4) 複素数平面上において z_n の表す点を P_n とする．(3) で求めた m に対し m 本の線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，$\cdots$，$\mathrm{P}_{m-1}\mathrm{P}_m$ で囲まれる図形の面積を S とする．$z_0=1-i$ のとき S の値を求めよ．

9 正方形 ABCD の内部の点 P に対して $\angle\mathrm{CPD}$ が直角であるとき，$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}$ の最大値を求めよ．