愛媛大学

数学

問題

2015年度入試

【学部】　教育学部、理学部、医学部、工学部、農学部

【入試名】　前期日程

【試験日】　2月25日

【問題解答前の確認事項】

〔入試科目〕　Ⓐ 理・工（環境建設工〈社会デザイン〉を除く）は数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B (列ベ)，Ⓑ 医学部は数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B (列ベ)，Ⓒ 農・工（環境建設工〈社会デザイン〉）学部は数Ⅰ・Ⅱ・A・B (列ベ)，Ⓓ 教育学部は数Ⅰ・Ⅱ・A・B (列ベ) と他教科との選択．

〔注意〕　Ⓐ は 4 ～ 7，9 (1)～(4) の 5 問，Ⓑ は 5 ～ 9 の 5 問，Ⓒ・Ⓓ は 1 ～ 3，9 (1)～(4) の 4 問を解答すること．

1 次の問いに答えよ．

(1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ からその整数部分を引いた値を a とするとき，a^2+4a+5 の値を求めよ．

(2) 次の連立方程式を解け． $\begin{cases}\log_2 x-\log_2 y=1\\ x\log_2 x-y\log_2 y=0\end{cases}$

(3) s，t を実数とする．座標空間内の同一平面上にある 4 点 O(0, 0, 0)，A(4, s, t)，B(2, 3, 2)，C(0, 5, 1) が $\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ をみたすとき，s，t の値を求めよ．

(4) 初項が 3，公比が 4 である等比数列の第 k 項を a_k とする．このとき，$\displaystyle\sum_{k=n}^{n^2} a_k$ を求めよ．

2 原点を O とする座標平面上に 3 点 A(0, 3)，B(4, 0)，C(4, 4) を頂点とする三角形 ABC があり，線分 AB 上に点 P がある．ただし，P は線分 AB の端点にないものとする．直線 OP によって三角形 ABC を 2 つの図形に分けたとき，点 A を含む図形の面積を S とする．線分 AP の長さを t とするとき，次の問いに答えよ．

(1) t の値の範囲を求め，点 P の座標を t を用いて表せ．

(2) 直線 OP が線分 AC と共有点をもつような t の値の範囲を求め，その共有点の座標を t を用いて表せ．

(3) S を t を用いて表せ．

3 a を自然数とし，関数 $f(x)=x^3+2x^2+ax+4$ は $x=x_1$ で極大，$x=x_2$ で極小になるものとする．また，曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 P(x_1, $f(x_1)$)，Q(x_2, $f(x_2)$) の中点を R とする．

(1) $a=1$ であることを示せ．

(2) 点 P および点 Q の座標を求めよ．

(3) 点 R は曲線 $y=f(x)$ 上にあることを示せ．

(4) 点 R における曲線 $y=f(x)$ の接線は，点 R 以外に $y=f(x)$ との共有点をもたないことを示せ．

4 次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x^3e^{x^2}\,dx$ を求めよ．

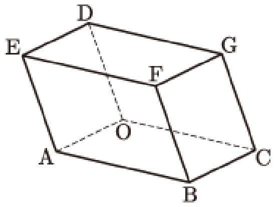
(2) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\log x|\,dx$ を求めよ．

(3) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $(\sqrt{2},\ 1)$ における接線の方程式を求めよ．

(4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ からその整数部分を引いた値を a とするとき，$a^4+5a^3+4a^2+4a$ の値を求めよ．

(5) 実数 a，b，c は $0<a<b<c$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)$ をみたすとする．このとき，$|b-a|<|b-c|$ が成り立つことを示せ．

5 t を実数とする．座標空間内に 4 点 O(0, 0, 0)，A(3, 0, 0)，C(-1, 6, -2)，D(t, -2, 4) がある．図のような平行六面体 OABC–DEFG において，点 P が平行四辺形 DEFG の周および内部を動くとき，△OCP の面積 S の最小値を m とする．また，平行四辺形 DEFG を含む平面を α とし，点 O から平面 α に下ろした垂線と平面 α との交点を Q とする．



(1) 平行四辺形 OABC を含む平面に垂直な単位ベクトル $\vec{u}$ で，その z 成分が正となるものを求めよ．

(2) 線分 OQ の長さを求めよ．

(3) 点 Q が平行四辺形 DEFG の周または内部にあるとき，t のとり得る値の範囲を求めよ．

(4) t が (3) で求めた範囲にあるとき，m の値および $S=m$ となる点 P の座標をすべて求めよ．

6 a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ を

$$a_1 = a,\quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (n\text{ が奇数のとき}) \\ 2a_n & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

$$b_1 = a,\quad b_{n+1} = \begin{cases} 2b_n & (n\text{ が奇数のとき}) \\ b_n + 1 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

で定める．

(1) a_2，a_3，a_4，および b_2，b_3，b_4 を求めよ．

(2) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{2n}$ で定める．$\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{S_n\}$，$\{T_n\}$，および $\{U_n\}$ をそれぞれ

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} a_k,\quad T_n = \sum_{k=1}^{2n} b_k,\quad U_n = S_n - T_n$$

で定める．

(i) $\{S_n\}$ の一般項を求めよ．

(ii) $a = 1$ のとき，$\{U_n\}$ の一般項を求めよ．

7 n を自然数とし，曲線 $y = n\sin\dfrac{x}{n}$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の第 1 象限における交点の座標を $(p_n,\ q_n)$ とする．

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $n\sin\dfrac{x}{n} < x$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $p_n > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$(☆)\quad \left(n\sin\frac{1}{n}\right)x \leqq n\sin\frac{x}{n}$$

が成り立つことを利用して，次の (i)，(ii) に答えよ．

(i) 不等式 $p_n \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1 + n^2\sin^2\dfrac{1}{n}}}$ が成り立つことを示せ．

(ii) x 軸，直線 $x = p_n$，および曲線 $y = n\sin\dfrac{x}{n}$ $(0 \leqq x \leqq p_n)$ で囲まれた領域の面積を S_n とするとき，S_n を p_n を用いて表せ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，(3) の不等式（☆）が成り立つことを示せ．

8 a を正の実数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 1 辺の長さが 1，他の 2 辺のうち 1 辺の長さが a である三角形のなかで，面積が最大である三角形の残りの 1 辺の長さを a を用いて表せ．

(2) 2 辺の長さが 1，他の 2 辺のうち 1 辺の長さが a である四角形のなかで，面積が最大である四角形の残りの 1 辺の長さを a を用いて表せ．

9 n を自然数，i を虚数単位とする．集合 I_1，I_2，I_3，I_4，および A を

$$I_1 = \{k \mid k\text{ は }n\text{ 以下の自然数}\}$$
$$I_2 = \{-k \mid k\text{ は }n\text{ 以下の自然数}\}$$
$$I_3 = \{ki \mid k\text{ は }n\text{ 以下の自然数}\}$$
$$I_4 = \{-ki \mid k\text{ は }n\text{ 以下の自然数}\}$$
$$A = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup \{0\}$$

とする．集合 A の要素が 1 つずつ書かれたカードが $4n+1$ 枚ある．ただし，それぞれのカードに書かれている要素は異なるものとする．これらのカードをよくまぜて，左から右に一列に並べる．左から k 番目のカードに書かれた数を X_k とするとき，次の確率を求めよ．

(1) 積 $X_1X_2X_3$ が 0 となる．

(2) 積 $X_1X_2X_3$ が実数となる．

(3) 和 $X_1 + X_2$ が実数となる．

(4) $X_1(X_2 + X_3)$ が 0 となる．

(5) $X_1(X_2 + X_3)$ が実数となる．