愛媛大学

数学

問題

2014年度入試

【学部】　教育学部、理学部、医学部、工学部、農学部

【入試名】　前期日程

【試験日】　2月25日

【問題解答前の確認事項】

〔入試科目〕　Ⓐ 理（数学受験コース）・工（環境建設工〈社会デザイン〉を除く）は数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B（列 ベ）・C（行 曲），Ⓑ 医（医）学部は数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B（列 ベ）・C（行 曲），Ⓒ 農・工（環境建設工〈社会デザイン〉）学部は数Ⅰ・Ⅱ・A・B（列 ベ），Ⓓ 教育（特別支援教育，学校教育〈保体は除く〉，総合人間形成〈生活環境，情報教育，人間社会デザイン〉）学部は数Ⅰ・Ⅱ・A・B（列 ベ）と他教科との選択．

〔注意〕　Ⓐ は 4 ～ 8 の 5 問，Ⓑ は 4，6 ～ 9 の 5 問，Ⓒ・Ⓓ は 1 ～ 4 の 4 問を解答すること．

1 次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{AB}=1$, $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ を満たす直角二等辺三角形 ABC において，辺 AB の中点を P，辺 AC を $2:1$ に内分する点を Q，線分 CP と線分 BQ の交点を R とする．このとき，線分 AR の長さを求めよ．

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{26}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．ただし，必要ならば $\log_{10}3=0.4771$ として計算せよ．

(3) k を実数とし，不等式 $x^2-2x-3>0$, $x^2-(k+1)x+k>0$ を満たす実数 x の集合をそれぞれ A, B とする．このとき，$A\subset B$ であるための必要十分条件を k を用いて表せ．

2 t, x は実数とする．関数 $f(t)$ を $f(t)=2|t-1|+t+1$ と定義し，$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ とおく．

(1) 関数 $y=f(t)$ のグラフをかけ．

(2) 関数 $F(x)$ を求めよ．

(3) 曲線 $y=F(x)$ 上の点 $(0,\ F(0))$ における接線 l の方程式を求めよ．

(4) 曲線 $y=F(x)$ と (3) で求めた接線 l とで囲まれた図形の面積を求めよ．

3 A は 3 桁(けた)の自然数で，その百の位の数 x，十の位の数 y，一の位の数 z は，

$$100x+10y+z=x!+y!+z!$$

を満たしている．

(1) $6!$ の値を求め，x, y, z はすべて 5 以下であることを示せ．

(2) x は 3 以下であることを示せ．

(3) y, z のうち少なくとも 1 つは 5 であることを示せ．

(4) A を求めよ．

4 n を 0 以上の整数とする．点 P，Q は，1 辺の長さが 1 である正四面体 ABCD の頂点の上を，以下の条件 (a)，(b) を満たしながら移動する．

(a)　時刻 $t=0$ において，点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 B にいる．

(b)　時刻 $t=n+1$ において，点 P と点 Q は各々，時刻 $t=n$ のときにいた頂点から，他の 3 つの頂点のいずれかに，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する．

時刻 $t=n$ における点 P と点 Q の間の距離を d_n とおく．d_n の値は 0 または 1 である．時刻 $t=n$ において $d_n=1$ となる確率を p_n とする．

(1) 時刻 $t=1$ とする．

(i)　点 P が頂点 C にいるとき，$d_1=1$ となる点 Q の位置は何通りか．

(ii)　点 P が頂点 B にいるとき，$d_1=1$ となる点 Q の位置は何通りか．

(2) p_1 を求めよ．

(3) $d_1+d_2=1$ となる確率を求めよ．

(4) p_{n+1} を p_n で表し，p_n を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) すべての実数 x に対して　$f(x)=\sin\pi x+\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt$

が成り立つような関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\theta^3}{\tan\theta-\sin\theta}$$

(3) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

(4) 関数 $f(x)=|x|(e^x+a)$ は $x=0$ において微分可能であるとする．このとき，定数 a の値を求めよ．

6 n は自然数，m は整数，k，α，β は実数とする．

(1) $\alpha \geqq 1$，$\beta \geqq 1$ のとき，$\alpha\beta \geqq \alpha + \beta - 1$ が成り立つことを示せ．

(2) x に関する 2 次方程式 $x^2 - mx + k = 0$ の 2 つの解を p，q とする．p が整数ならば，q と k も整数であることを示せ．

(3) x に関する 2 次方程式 $x^2 - n^2x + n = 0$ は，整数の解をもたないことを示せ．

(4) x に関する 2 次方程式 $x^2 - (n-2)^2x + n = 0$ が整数の解をもつとき，n の値とその解をすべて求めよ．

7 a，b は，$0 < b < a$ を満たす実数とする．曲線 $y = e^x$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線 l_1 の方程式を $y = f(x)$，点 $(a,\ e^a)$ における接線 l_2 の方程式を $y = g(x)$ とおく．また，l_1 と l_2 の交点の x 座標を $p(a)$ とする．連立不等式

$$0 \leqq x \leqq b,\quad f(x) \leqq y \leqq e^x$$

の表す領域の面積を S_1，連立不等式

$$b \leqq x \leqq a,\quad g(x) \leqq y \leqq e^x$$

の表す領域の面積を S_2 とし，$R = e^{-b}S_2$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．必要ならば，すべての自然数 k に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0$ が成り立つことを用いてよい．

(1) $p(a)$ を求めよ．

(2) S_1 と S_2 を求めよ．

(3) $t = a - b$ とする．R を t のみの関数として表せ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} (a - p(a))$ を求めよ．

(5) $b = p(a)$ とする．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．

8 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とし，t は実数とする．A は，$A^3 = E$ を満たす 2 次の正方行列とする．

(1) $(A - tE)(A^2 + tA + t^2E)$ を t と E を用いて表せ．

(2) $t \neq 1$ のとき $A - tE$ は逆行列をもつことを示せ．

(3) 次の 3 つの命題を証明せよ．

(i) $A = E$ ならば，$A^2 + A + E \neq O$ である．

(ii) $A^2 + A + E \neq O$ ならば，$A - E$ は逆行列をもたない．

(iii) $A - E$ が逆行列をもたないならば，$A = E$ である．

9 n は自然数，p_0，p_1，$\cdots$，p_n は $p_0>0$，$p_1>0$，$\cdots$，$p_n>0$ かつ $p_0+p_1+\cdots+p_n=1$ を満たす定数とする．ポイント

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ n$$

が，それぞれ

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_{n-1},\ p_n$$

の確率で得られる試行 T を考える．試行 T を1回行って得られるポイントの期待値を a とし，$A=[a]+1$ とする．ただし，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．

競技者は，試行 T を下記の各設問のルールに従って何回か行う．

(1) k を $1\leqq k\leqq n$ を満たす整数とする．競技者は，試行 T を以下のルールに従って最大2回まで行う．

① 試行 T を1回行い，もしポイントが k 以上であれば2回目の試行を行わず，このポイントを賞金とする．

② 1回目のポイントが k 未満であれば2回目の試行 T を行う．このとき，1回目のポイントは無効とし，2回目のポイントを賞金とする．

このとき賞金の期待値を b_k とする．b_k を求めよ．

(2) (1) の期待値 b_k は k が A のとき最大となることを示せ．

(3) m を $1\leqq m\leqq n$ を満たす整数とする．競技者は，試行 T を以下のルールに従って最大3回まで行う．

① 試行 T を1回行い，もしポイントが m 以上であれば2回目以降の試行を行わず，このポイントを賞金とする．

② 1回目のポイントが m 未満であれば2回目の試行 T を行う．2回目のポイントが A 以上であれば3回目の試行を行わない．このとき，1回目のポイントは無効とし，2回目のポイントを賞金とする．

③ 2回目のポイントが A 未満であれば3回目の試行 T を行う．このとき，1回目，2回目のポイントは無効とし，3回目のポイントを賞金とする．

このとき賞金の期待値を c_m とする．c_m を求めよ．

(4) (3) の期待値 c_m は m が $B=[b_A]+1$ のとき最大となり，$c_B\geqq b_A$ であることを示せ．ただし，b_A は (1) で求めた期待値 b_k の $k=A$ のときの値である．

(5) $n=5$ とし，試行 T として，5枚の硬貨を同時に投げ，表の出た枚数をポイントとする試行を考える．また，b_k，c_m は上記で定義したものとする．

(i) p_0，p_1，p_2，p_3，p_4，p_5，a を求めよ．

(ii) (1) のように最大2回試行を行う場合，b_k の最大値を求めよ．

(iii) (3) のように最大3回試行を行う場合，c_m の最大値を求めよ．