弘前大学

平成26年度入学試験問題(前期)

数　　学

数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いて見てはならない。
2. 本冊子には，4から7までの4問題が印刷されていて，合計2ページである。
   落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所等がある場合には申し出ること。
3. 解答用紙を別に配付している。解答は，問題と同じ番号の解答用紙に記入すること。なお，解答用紙の裏面に記入してはならない。解答用紙の裏面に記入した内容は採点されないので注意すること。
4. 各学部・学科・課程・専攻・専修等で課す問題は下に表示する。
   教育学部学校教育教員養成課程教科教育専攻算数・数学専修 4，5，6
   教育学部学校教育教員養成課程教科教育専攻理科専修 4，5，6
   教育学部学校教育教員養成課程教科教育専攻技術専修 4，5，6
   医学部医学科 4，5，6
   医学部保健学科放射線技術科学専攻 4，5，6
   理工学部数理科学科 4，5，6，7
   理工学部物理科学科 4，5，6
   理工学部物質創成化学科 4，5，6
   理工学部地球環境学科 4，5，6
   理工学部電子情報工学科 4，5，6
   理工学部知能機械工学科 4，5，6
5. 解答用紙の指定された欄に学部名及び受験番号を記入すること。
6. 提出した解答用紙以外はすべて持ち帰ること。

4 次の連立不等式の表す領域をDとする。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 3 \\ x^2 + y^2 + 6y \geqq 3 \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 領域Dを座標平面上に図示せよ。

(2) 領域Dをx軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

5 $f(x) = \dfrac{x}{2^x}$とし，$f'(x)$を$f(x)$の導関数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 定数cを$0 \leqq c \leqq 2$とする。このとき，$0 \leqq x \leqq 2$を満たすxに対して，不等式

$$f(x) \leqq f'(c)(x - c) + f(c)$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するのはどのようなときか述べよ。

(2) nを自然数とする。$x_1, x_2, \cdots, x_n$は0以上の実数で，$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2$を満たすとする。このとき，不等式

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leqq nf\left(\frac{2}{n}\right)$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するのはどのようなときか述べよ。

6 行列

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $4P+Q=A$ と $P+Q=E$ を満たす2次正方行列 P, Q を求めよ。

(2) (1)で求めた P, Q に対して，PQ, QP を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，A^n を求めよ。

(4) A^n の逆行列を $B_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とする。極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$, $\lim_{n\to\infty} c_n$, $\lim_{n\to\infty} d_n$ を求めよ。

7 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を，

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{2b_n+1} & (n=1, 2, 3, \cdots) \\ b_1=3,\ b_{n+1}=\sqrt{2a_n+1} & (n=1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

と定めるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\alpha=1+\sqrt{2}$ とする。自然数 n に対して，不等式

$$|a_{n+1}-\alpha| \leqq \left(\frac{2}{1+\alpha}\right)|b_n-\alpha|$$

が成り立つことを示せ。

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。