弘前大学 一般

平成23年度入学試験問題(前期)

数　　学

数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いて見てはならない。
2. 本冊子には，4から9までの問題が印刷されていて，合計3ページである。落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所等がある場合には，申し出ること。
3. 解答用紙を別に配付している。解答は，問題と同じ番号の解答用紙に記入すること。なお，解答用紙の裏面に記入してはならない。解答用紙の裏面に記入した内容は，採点されないので注意すること。
4. 各学部・学科・課程・専攻・専修等で課す問題は下に表示する。

   教育学部学校教育教員養成課程教科教育専攻算数・数学専修 4, 5, 9

   教育学部学校教育教員養成課程教科教育専攻理科専修 4, 5, 9

   教育学部学校教育教員養成課程教科教育専攻技術専修 4, 5, 9

   医学部医学科 7, 8, 9

   医学部保健学科放射線技術科学専攻 5, 6, 9

   理工学部数理科学科 5, 6, 7, 8, 9

   理工学部物理科学科 5, 6, 9

   理工学部物質創成化学科 5, 6, 9

   理工学部地球環境学科 5, 6, 9

   理工学部電子情報工学科 5, 6, 9

   理工学部知能機械工学科 5, 6, 9
5. 解答用紙の指定された欄に学部名及び受験番号を記入すること。
6. 提出した解答用紙以外は，すべて持ち帰ること。

$\boxed{4}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$　ただし，m, n は自然数である。

(2) $\displaystyle\int_1^{3} \left(x - \frac{1}{x}\right) (\log x)^2 \, dx$

$\boxed{5}$ n を自然数とし，

$$S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}(|\sin x| + 1) \, dx$$

とする。ただし，e は自然対数の底である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $e^{-x}(\sin x + \cos x)$ を微分せよ。

(2) S_n および無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

$\boxed{6}$ 次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) すべての実数 x に対して，次の不等式を証明せよ。

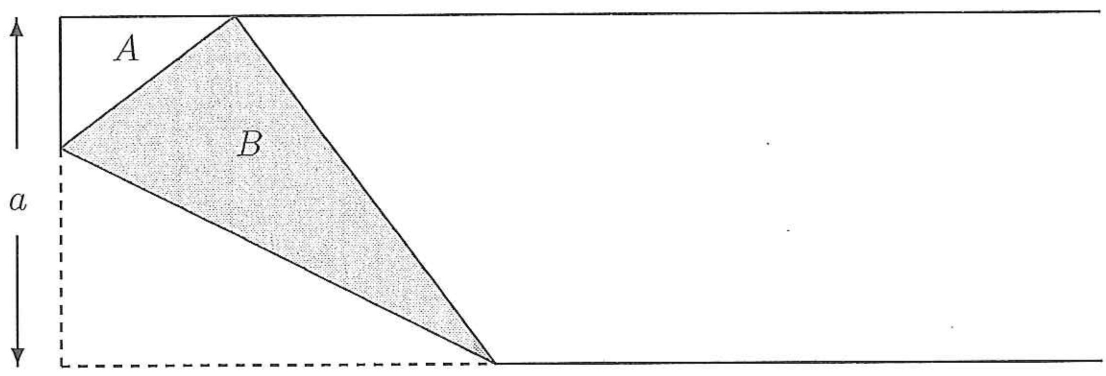
$$1 - x^2 \leqq e^{-x^2} \leqq 1$$

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^2 e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2}\,dx$ を求めよ。

$\boxed{7}$ 細長い長方形の紙があり，短い方の辺の長さが a で長い方が $9a$ であったとする。下図のように，この長方形の 1 つの角 (かど) を反対側の長い方の辺に接するように折る。図に示した 2 つの三角形 A, B について，次の問いに答えよ。

(1) 三角形 A の面積の最大値を求めよ。

(2) 三角形 B の面積の最小値を求めよ。



$\boxed{8}$ 正２０角形 P について，次の問いに答えよ。

(1) 正２０角形 P の対角線は何本ひけるか。

(2) 正２０角形 P の頂点から３つを選び，これらを頂点とする三角形をつくるとき，P と辺を共有しない三角形はいくつあるか。ただし，合同な三角形は区別せずに１つと数えることにする。

$\boxed{9}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件を満たしているものとする。

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) A および A^2 を求めよ。

(2) O を座標平面上の原点とし，O と異なる点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ があり，他の２点 $\mathrm{Q}(x_2, y_2), \mathrm{R}(x_3, y_3)$ に対して次の関係があるとする。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

このとき，三角形 OQR が正三角形であることを証明せよ。

(3) 点 P, Q は (2) と同じものとする。$\angle\mathrm{OPQ}$ の大きさを求めよ。