広島大学

数学

問題

2019年度入試

【学部】 総合科学部、教育学部、理学部、医学部、歯学部、薬学部、工学部、生物生産学部、情報科学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

【試験時間】 150分

1 $a>0$，$r>0$ とし，数列 $\{a_n\}$ を初項 a，公比 r の等比数列とする．また，数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される．

$$b_1 = a_1,\ b_{n+1} = b_n a_{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) b_n を a，r および n を用いて表せ．

(2) 一般項が

$$c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$$

である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ．

(3) (2) で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする．すなわち，

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k$$

とする．このとき，一般項が

$$d_n = 2^{M_n}$$

である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ．

2 箱の中に 1 から N までの数が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている．ただし，N を 2 以上の自然数とする．「カードをよく混ぜて 1 枚取り出し，そのカードに書かれた数を読み取り，そのカードをもとに戻す」という試行を 4 回繰り返す．1 回目，2 回目，3 回目および 4 回目に取り出したカードに書かれた数を，それぞれ a_1，a_2，a_3，a_4 とする．また，座標平面上に 4 点 $\mathrm{P}_1(a_1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{P}_3(a_1-a_3,\ a_2)$，$\mathrm{P}_4(a_1-a_3,\ a_2-a_4)$ を定める．次の問いに答えよ．

(1) P_4 が原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ に一致する確率を N を用いて表せ．

(2) P_4 が連立不等式 $x \geqq 0$，$y \leqq 0$ の表す領域にある確率を N を用いて表せ．

(3) P_4 が直線 $y = x$ 上にある確率を N を用いて表せ．

(4) $N = 2^m$ とする．ただし，m を自然数とする．P_4 が原点 O に一致し，かつ，四角形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ の面積が 2^m となる確率を m を用いて表せ．

3 関数 $f(x)$ は実数全体で連続で，すべての実数 x に対して

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - \int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt$$

を満たすとする．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．また，$f'(x) = 2(x-1)\cos x$ が成り立つことを示せ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) 方程式 $f(x) = 0$ は，$0 < x < \pi$ の範囲にただ一つの解をもつことを示せ．

(4) (3) のただ一つの解を α とする．曲線 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \alpha)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 $y = f(x)$ $(\alpha \leqq x \leqq \pi)$，$x$ 軸および直線 $x = \pi$ によって囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1 と S_2 の大小を判定せよ．

4 i を虚数単位とし，複素数 z に対して，

$$w = z^2 + 2z + 1 - 2i$$

とおく．次の問いに答えよ．

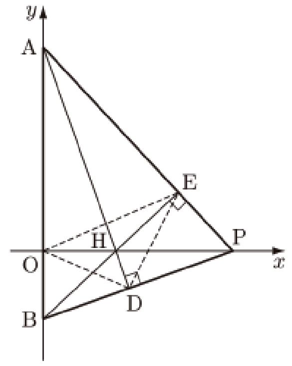
(1) w の実部が 0 となる複素数 z 全体を複素数平面上に図示せよ．

(2) $w = 0$ を満たす複素数 z の個数は 2 個であることを証明し，それぞれを $a + bi$（a，b は実数）の形に書き表せ．

(3) (2) で求めた二つの複素数のうち実部の大きい方を α，実部の小さい方を β とし，対応する複素数平面上の点をそれぞれ A，B とする．また，線分 AB の中点を M とする．複素数 z に対応する複素数平面上の点が，線分 AM 上（両端を含む）を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(4) 複素数 z に対応する複素数平面上の点が，点 A を通り線分 AB に垂直な直線上を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ．

5 原点をOとする座標平面上において，点 $A(0,\ 3)$，$B(0,\ -1)$ および x 軸上の正の部分を動く点 $P(t,\ 0)$ があり，$\angle APB$ は鈍角でないとする．$\triangle ABP$ の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする．次の問いに答えよ．ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている．その交点のことを，三角形の垂心という．



(1) $\angle APB$ が直角となる t の値を求めよ．

(2) 点 H の座標を t を用いて表せ．

以下では，t が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする．

(3) 点 H が $\triangle ODE$ の内心であることを証明せよ．ただし，1 組の対角の和が $180°$ である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい．

(4) $\triangle ODE$ の内接円の半径を t の関数 $f(t)$ として表せ．

(5) (4) で求めた関数 $f(t)$ は最大値をもつことを示せ．ただし，最大値を与える t の値を求める必要はない．