広島大学

数学

問題

2018年度入試

【学部】 総合科学部、教育学部、理学部、医学部、歯学部、薬学部、工学部、生物生産学部、情報科学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

1 次の問いに答えよ．

(1) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(A) 2次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x, y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(2) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(B) 2次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$, $1 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数 x, y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(3) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が4点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ．

2 複素数平面上の4点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$，$\mathrm{D}(\delta)$ を頂点とする四角形ABCDを考える．ただし，四角形ABCDは，すべての内角が $180°$ より小さい四角形（凸四角形）であるとする．また，四角形ABCDの頂点は反時計回りにA，B，C，Dの順に並んでいるとする．四角形ABCDの外側に，4辺AB，BC，CD，DAをそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形APB，BQC，CRD，DSAを作る．次の問いに答えよ．

(1) 点Pを表す複素数を求めよ．

(2) 四角形PQRSが平行四辺形であるための必要十分条件は，四角形ABCDがどのような四角形であることか答えよ．

(3) 四角形PQRSが平行四辺形であるならば，四角形PQRSは正方形であることを示せ．

3 次の問いに答えよ．

(1) すべての実数 t に対し，$1+t \leqq e^t$ が成り立つことを示せ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 次の不等式を示せ．

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2-\sqrt{2}$$

4 0，1，2，3の数字が一つずつ書かれた4枚のカードがある．この中から1枚を取り出し，書かれた数字を見て元に戻す．この操作を N 回繰り返し，カードに書かれた数字を順に Z_1，Z_2，$\cdots$，Z_N とする．ここで，N は3以上の自然数である．さらに，複素数

$$\alpha=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$$

を用いて，項数 N の数列 $\{X_n\}$ を

$$X_1=\alpha^{Z_1},\ X_{n+1}=X_n\alpha^{Z_{n+1}} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$$

により定める．$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ に対し，$X_n=\alpha$ となる確率を P_n とし，$X_n=\alpha^2$ となる確率を Q_n とする．次の問いに答えよ．

(1) P_1 を求めよ．

(2) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$ とする．$\alpha^{Z_{n+1}}=1$ となる確率を求めよ．

(3) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ とする．$X_n=1$ となる確率を，P_n と Q_n を用いて表せ．

(4) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$ に対し，P_n を用いて P_{n+1} を表せ．

(5) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ に対し，P_n を求めよ．

5 座標平面上で，曲線 $C\colon y=x^3-3x$ と，$b>a^3-3a$ を満たすように動く点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を考える．また，点Pに対し，二つの不等式

$$|x-a| \leqq 1,\ |y-b| \leqq 1$$

によって表される座標平面上の領域を B とする．領域 B と曲線 C に対して，B と C が共有点Qをもち，さらに B と C の共有点が B の境界線上にしかないとき，B と C は点Qで接するということにする．次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概形をかき，さらに点Pの座標が $(-2,\ 3)$ のときの領域 B を図示せよ．

(2) B と C が $x<-1$ の範囲にある点で接するように，点Pは動くとする．このときの点Pの軌跡を求めよ．

(3) B と C がある点で接するように点Pは動くとする．このときの点Pの軌跡を求めよ．

(4) (3)の点Pの軌跡は，ある関数 $y=f(x)$ のグラフで表すことができる．この $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示せ．