広島大学

数学

問題

2017年度入試

【学部】　総合科学部、教育学部、理学部、医学部、歯学部、薬学部、工学部、生物生産学部

【入試名】　前期日程

【試験日】　2月25日

1 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \tan\frac{\pi}{3},\quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1) $a_2 = \tan\dfrac{\pi}{6}$，$a_3 = \tan\dfrac{\pi}{12}$ であることを示せ．

(2) 一般項 a_n を表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n a_n$ を求めよ．

2 $a > 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(t) = t^3 - 2at + 1$ の区間 $t \geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ．

(2) (1) で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく．A^3 を求めよ．

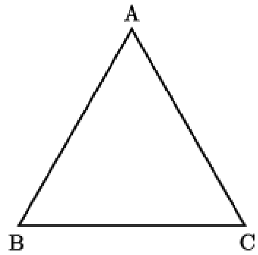
(3) 座標平面上の曲線 $y = x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする．C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ．

(4) 座標平面において，点 P が曲線 $y = x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える．その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ．

3 表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある．ただし，$0 < p < 1$ である．このとき，右図のような正三角形の 3 頂点 A，B，C を次の規則で移動する動点 R を考える．

コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し，裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する．

R は最初 A にあり，全部で $(2N+3)$ 回移動する．ここで，N は自然数である．移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k = 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N+3)$ とする．次の問いに答えよ．

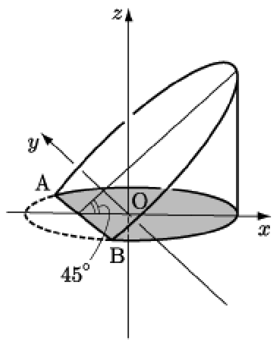


(1) P_2，P_3 を求めよ．

(2) P_{2m}，P_{2m+1} $(2 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ．

(3) $p = \dfrac{1}{2}$ とする．移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ．

4 座標空間内の平面 $H\colon z = 0$ とその上の曲線 $C\colon \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を考える．C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする．C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と 45° の角をなす平面を T とする．ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする．平面 H，平面 T および曲面 K が囲む二つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする．次の問いに答えよ．



(1) 立体 V と平面 H の共通部分（右図の灰色で示される部分）の面積を求めよ．

(2) 立体 V を平面 $x = t$ $(-1 < t < 2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ．

(3) 立体 V の体積を求めよ．

5 x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ．格子点 O(0, 0) および A(50, 14) を考える．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ を満たす格子点 P を一つ求めよ．

(2) m を自然数とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ を満たす格子点 P のうち，長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする．P_1 および P_2 を求めよ．

(3) P_m を (2) で定めた格子点とする．自然数 k に対し，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}$ を成分表示せよ．

(4) P_m を (2) で定めた格子点とする．Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}$ を満たす点とする．四角形 $\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ．