広島大学

数学

問題

2016年度入試

【学部】 総合科学部、教育学部、理学部、医学部、歯学部、薬学部、工学部、生物生産学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

1
座標空間に 4 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(s,\ s,\ s)$，$B(-1,\ 1,\ 1)$，$C(0,\ 0,\ 1)$ がある．ただし，$s>0$ とする．t，u，v を実数とし，

$$\vec{d}=\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA},\quad \vec{e}=\overrightarrow{OC}-u\overrightarrow{OA}-v\overrightarrow{OB}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OA}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OA}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{OA}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，u，v を s を用いて表せ．

(3) (2) のとき，2 点 D，E を $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{OE}=\vec{e}$ となる点とする．四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ．

2
次の問いに答えよ．

(1) a を正の定数とする．関数 $f(x)=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ．

(3) c を正の定数とする．x 軸，y 軸，直線 $x=c$ および曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

3
複素数平面上を，点 P が次のように移動する．

1. 時刻 0 では，P は原点にいる．時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する．移動後の P の位置を $Q_1(z_1)$ とすると，$z_1=1$ である．
2. 時刻 1 に P は $Q_1(z_1)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する．移動後の P の位置を $Q_2(z_2)$ とすると，$z_2=\dfrac{3+i}{2}$ である．
3. 以下同様に，時刻 n に P は $Q_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する．移動後の P の位置を $Q_{n+1}(z_{n+1})$ とする．ただし n は自然数である．

$\alpha=\dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ．

(1) z_3，z_4 を求めよ．

(2) z_n を α，n を用いて表せ．

(3) P が $Q_1(z_1)$，$Q_2(z_2)$，$\cdots$ と移動するとき，P はある点 $Q(w)$ に限りなく近づく．w を求めよ．

(4) z_n の実部が (3) で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ．

4
xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う．
1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く．ただし，点 $(3,\ 1)$ に到達したら Q は原点に戻る．
この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となる確率を求めよ．

(2) $(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となる確率を求めよ．

(3) $x_8+y_8\leqq 4$ となる確率を求めよ．

(4) $x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ．ここで k は n 以下の自然数とする．

5
数列

$$x_n=2^n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える．この数列は 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, $\cdots$ であるが，各項の下 1 桁をみると，1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, $\cdots$ となっており，2 から循環が始まり循環の周期は 4 である．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 2 桁は，あるところから循環する．循環が始まるところと，循環の周期を求めよ．ここで，1 桁の数に対しては 0 を補って下 2 桁とみなすことにする．たとえば，2 の下 2 桁は 02 とする．

(2) 4 の倍数で，25 で割って 1 余る 2 桁の自然数 A を求めよ．

(3) 8 の倍数で，125 で割って 1 余る 3 桁の自然数 B を求めよ．

(4) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 3 桁は，あるところから循環する．循環が始まるところと，循環の周期を求めよ．ここで，2^m を 125 で割って 1 余るような最小の自然数 m が 100 であることを用いてもよい．