学力検査問題

数　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ

数学A，数学B，数学C

平成26年2月25日

自　9時00分

至11時30分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B（数列，ベクトル），数学C（行列とその応用，式と曲線）の問題が**5問**あります。総ページは**13ページ**で，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は**5枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

◇M7(661—136)

空　白

空　白

〔1〕 a, b を実数，$a > 0$ として，行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$ の定める1次変換を f とする。f によって，点 $\mathrm{P}(1, 0)$ が点 P_1 に移され，点 P_1 が点 P_2 に移されるものとする。P が線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の中点であるとき，次の問いに答えよ。

(1) a, b を求めよ。

(2) ある実数 c に対して $c\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = (v_1, v_2)$ とすると，

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。cを求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PP}_1} = (w_1, w_2)$ とする。すべての自然数 n に対して

$$A^n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (-2)^n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ。

(4) (2) と (3) の v_1, v_2, w_1, w_2 に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s(v_1, v_2) + t(w_1, w_2)$ となる実数 s, t を求め，$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を n を用いて表せ。ただし，n は自然数である。

空　白

〔2〕 二つの関数 $f(x) = x\sin x$, $g(x) = \sqrt{3}x\cos x$ について次の問いに答えよ。ただし，(3) と (4) において，a および $h(x)$ は (2) で定めたものとする。

(1) 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の共有点のうち，x 座標が $-\pi \leqq x \leqq \pi$ であるものをすべて求めよ。

(2) (1) で求めた共有点のうち，x 座標が正である点を $\mathrm{A}(a, f(a))$ とする。点 A における曲線 $y = g(x)$ の接線を $y = h(x)$ と表す。$h(x)$ を求めよ。

(3) $0 \leqq x \leqq a$ のとき，$h(x) \geqq g(x)$ であることを示せ。

(4) $0 \leqq x \leqq a$ の範囲において，y 軸，曲線 $y = g(x)$，および直線 $y = h(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

空　白

〔3〕 四面体OABCにおいて$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 1$とする。$\triangle\mathrm{OAB}$の重心をF，$\triangle\mathrm{OAC}$の重心をGとし，辺OAの中点をMとする。また，$\angle\mathrm{BOC} = 2\theta$とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FG}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{BC}}$であることを示せ。

(3) $\triangle\mathrm{MBC}$の面積をθを用いて表せ。

空　白

〔４〕　$\alpha > 1$ とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \alpha,\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $a_n > 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(2) $\sqrt{x} - 1 \leqq \dfrac{1}{2}(x-1)$ 　（ただし，$x \geqq 0$ とする。）

(3) $a_n - 1 \leqq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

空　白

〔５〕　1辺の長さが1の正六角形において，頂点を反時計回りに $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_5, \mathrm{P}_6$ とする。1個のさいころを2回投げて，出た目を順に j, k とする。$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_j, \mathrm{P}_k$ が異なる3点となるとき，この3点を頂点とする三角形の面積を S とする。$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_j, \mathrm{P}_k$ が異なる3点とならないときは，$S=0$ と定める。次の問いに答えよ。

(1) $S>0$ となる確率を求めよ。

(2) S が最大となる確率を求めよ。

(3) S の期待値を求めよ。

空　白