広島大学 医学部 歯学部 一般 前期

学 力 検 査 問 題

数　　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ

数学A，数学B，数学C

平成25年2月25日

自　9時00分

至11時30分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B（数列，ベクトル），数学C（行列とその応用，式と曲線）の問題が**5問**あります。総ページは**13ページ**で，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は**5枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

◇M7(128—129)

〔1〕 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。座標平面上で原点 O を通り傾きが $\tan\theta$ の直線を ℓ とし，行列

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

の表す1次変換を f とする。座標平面上に2点 P, Q がある。次の問いに答えよ。

(1) 線分 OP が直線 ℓ と垂直であるとき，1次変換 f による点 P の像を求めよ。

(2) 1次変換 f による点 Q の像を R とする。このとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right| \leqq \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ が成り立つことを示せ。さらに等号が成立する場合を調べよ。

(3) 1次変換 f による点 $(1, 1)$ の像を S とする。このとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|$ が最大となる θ と最小となる θ をそれぞれ求めよ。

〔2〕 座標平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n を 3 以上の自然数とし，連立不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad x + y \leqq n$$

の表す領域を D とする。格子点 $\mathrm{A}(a, b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c, d)$ が $|a-c|+|b-d|=1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という。次の問いに答えよ。

(1) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。

(2) 領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ。ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

(3) 領域 D から異なる格子点を 2 つ選ぶとき，互いに隣接点である確率を求めよ。ただし，異なる格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

〔3〕 座標平面上の 2 点 $A(0,1)$, $B(t,0)$ を考える。ただし，$t \geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。

(2) (1) で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ。

(3) k を定数とする。点 B と直線 $y = kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ。

〔4〕 平面上の 3 点 O, A, B は $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ を満たすとする。線分 AB の中点を M とする。$t>1$ として，点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となるように定める。△ABC の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) S を t と θ を用いて表せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ のとき，S を t のみを用いて表せ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ のとき，S が最大となる t の値を求めよ。

〔5〕 次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $x \geqq 2$ のとき，$x^4 e^{-3x} \leqq 16\,e^{-6}$ を示せ。また，これを用いて $\lim_{x \to \infty} x^3 e^{-3x}$ を求めよ。

(2) k を定数とする。$x > 0$ の範囲で方程式

$$xe^{-3x} = \frac{k}{x^2}$$

がちょうど 2 つの解 α, β $(\alpha < \beta)$ をもつような k の値の範囲を求めよ。

(3) (2) の α, β が $\beta = 2\alpha$ を満たすとき，曲線 $y = xe^{-3x}$ $(x > 0)$ と曲線 $y = \dfrac{k}{x^2}$ $(x > 0)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。