島根大学

数学

問題

2018年度入試

【学部】 医学部、総合理工学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

1 次の問いに答えよ．

(1) n が 3 で割って 1 余る自然数であるとき，$1+n+n^2$ は 3 の倍数であることを示せ．

(2) すべての自然数 n に対し，$n(n+1)(1+n+n^2)$ は 3 の倍数であることを示せ．

(3) すべての自然数 n，k に対し，

$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(1+n+n^2+\cdots+n^{k+1})$$

は $k+2$ の倍数であることを示せ．

2 曲線 C を時刻 t $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ によって

$$\begin{cases} x=\sin t, \\ y=y(t), \quad y(0)=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$$

と媒介変数表示される動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡とする．また，$0<x<1$ のとき，$\mathrm{P}(x,\ y)$ における曲線 C の接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-\pi x}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

で与えられているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 時刻 $t=\dfrac{\pi}{4}$ のときの点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

(2) 時刻 t $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における点 P の y 軸方向の速度 $\dfrac{dy}{dt}$ を t を用いて表せ．

(3) $y(t)$ を t を用いて表せ．

(4) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

3 $\triangle\mathrm{AOP}$ が次の条件 (i)，(ii) をみたしている．

(i) $\mathrm{OA}=1$

(ii) $\angle\mathrm{APO}=60^\circ$，$0^\circ<\angle\mathrm{AOP}<90^\circ$，$0^\circ<\angle\mathrm{OAP}<90^\circ$

直線 AP に関して O と対称な点を B とし，直線 BP に関して A と対称な点を C とおき，線分 OB と線分 AP の交点を M，線分 OB と線分 AC の交点を Q とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 3 点 O，P，C が一直線上にあることを示せ．

(2) $x=\mathrm{OM}$，$y=\mathrm{AM}$ とするとき，線分 OP，AP，BQ の長さをそれぞれ x，y を用いて表せ．x または y のみを用いて表してもよい．

(3) $\theta=\angle\mathrm{AOB}$ とする．条件 (i)，(ii) をみたす $\triangle\mathrm{AOP}$ のうちで，線分 OC の長さが最大となる場合の θ の値を求めよ．

4 2 枚のコインを同時に投げたとき，共に表が出るか共に裏が出れば一致が起こったという．大小 2 つの公正なコインを同時に投げる操作を n 回繰り返したとき，連続して一致が起こった回数の最大値が M である確率を $p(n,\ M)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $p(4,\ 2)$ を求めよ．

(2) $p(2k,\ k)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p(2k,\ k)$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2^m}=0$ であることを用いてもよい．