

島根大学

数学

問題

2018年度入試

【学部】 医学部、総合理工学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日



「過去問ライブラリーは、(株)旺文社が刊行する「全国大学入試問題正解」を中心とした過去問、研究・解答(解答・解説)を掲載しています。本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は、(株)旺文社または各情報提供者に帰属します。本サービスに掲載の全部または一部の無断複製、配布、転載、譲渡等を禁止します。各設問に対する「研究・解答」は原則として旺文社が独自に作成したものを掲載しています。掲載問題のうち★印を付したものは、著作権法第67条の2第1項の規定により文化庁長官に裁定申請を行った上で利用しています。

裁定申請日 【2017年】8/1 【2018年】4/24、9/20 【2019年】6/20

1 次の問いに答えよ.

- (1) n が 3 で割って 1 余る自然数であるとき, $1 + n + n^2$ は 3 の倍数であることを示せ.
- (2) すべての自然数 n に対し, $n(n+1)(1+n+n^2)$ は 3 の倍数であることを示せ.
- (3) すべての自然数 n, k に対し,

$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(1+n+n^2+\cdots+n^{k+1})$$

は $k+2$ の倍数であることを示せ.

2 曲線 C を時刻 t ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) によって

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = y(t), \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

と媒介変数表示される動点 $P(x, y)$ の軌跡とする. また, $0 < x < 1$ のとき, $P(x, y)$ における曲線 C の接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \pi x}{\pi \sqrt{1 - x^2}}$$

で与えられているとする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 時刻 $t = \frac{\pi}{4}$ のときの点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ.
- (2) 時刻 t ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) における点 P の y 軸方向の速度 $\frac{dy}{dt}$ を t を用いて表せ.
- (3) $y(t)$ を t を用いて表せ.
- (4) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

3 $\triangle AOP$ が次の条件 (i), (ii) をみたしている.

(i) $OA = 1$

(ii) $\angle APO = 60^\circ$, $0^\circ < \angle AOP < 90^\circ$, $0^\circ < \angle OAP < 90^\circ$

直線 AP に関して O と対称な点を B とし, 直線 BP に関して A と対称な点を C とおき, 線分 OB と線分 AP の交点を M , 線分 OB と線分 AC の交点を Q とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 3 点 O, P, C が一直線上にあることを示せ.
- (2) $x = OM$, $y = AM$ とするとき, 線分 OP, AP, BQ の長さをそれぞれ x, y を用いて表せ. x または y のみを用いて表してもよい.
- (3) $\theta = \angle AOB$ とする. 条件 (i), (ii) をみたす $\triangle AOP$ のうちで, 線分 OC の長さが最大となる場合の θ の値を求めよ.

4 2 枚のコインを同時に投げたとき, 共に表が出るか共に裏が出れば一致が起こったという. 大小 2 つの公正なコインを同時に投げる操作を n 回繰り返したとき, 連続して一致が起こった回数の最大値が M である確率を $p(n, M)$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $p(4, 2)$ を求めよ.
- (2) $p(2k, k)$ を求めよ.
- (3) $\sum_{k=1}^{\infty} p(2k, k)$ を求めよ. ただし, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{2^m} = 0$ であることを用いてもよい.