島根大学

数学

問題

2015年度入試

【学部】　教育学部、医学部、総合理工学部、生物資源科学部

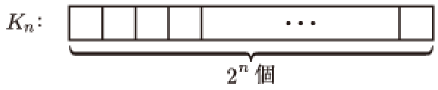
【入試名】　前期日程

【試験日】　2月25日

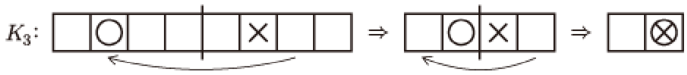
【問題解答前の確認事項】

〔注意〕　総合理工（数理・情報システム）学部は 2～5，医（医）学部は 1，3～5，総合理工（物質科学・機械・電気電子工・建築・生産設計工・地球資源環境）学部は 6～8，教育・生物資源科学部は 6，7，9 を解答すること．

1 n を自然数とする．右図のように，同じ大きさの正方形のマスが 2^n 個描かれた透明なシート K_n を使って次のゲームを行う．まず，1 から 2^n までの自然数の中から無作為に一つ選ぶ試行を 2 回行い，1 回目に選ばれた自然数を x_1，2 回目に選ばれた自然数を x_2 とする（$x_1 = x_2$ となることもある）．このとき，K_n の左から x_1 個目のマスに○を記入し，左から x_2 個目のマスに×を記入する．次に，このシートを中央の線（左右のマスの数が等しくなるような縦の線）で折り畳むという操作を繰り返し行い，○が書かれたマスと×が書かれたマスが重なったときゲームを終了する．ゲームが k 回の操作で終了したとき，得点を k とする．



例えば，$n = 3$，$x_1 = 2$，$x_2 = 6$ のとき，右図のようになり，得点は 2 となる．



ただし，○，×が始めから同じマスにある場合は得点を 0 とする．以上のゲームにおいて k 点を得る確率を $p(n,\ k)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $p(n,\ 1)$ を求めよ．また，$n \geqq 2$ のとき，$p(n,\ 2)$ を求めよ．

(2) $2 \leqq k \leqq n$ のとき，$p(n,\ k)$ を $p(n-1,\ k-1)$ を用いて表せ．

(3) $1 \leqq k \leqq n$ のとき，$p(n,\ k)$ を求めよ．

2 t を $0 < t < 1$ をみたす実数とする．xy 平面上の 3 点 A$(-1,\ 1)$，B$(0,\ -1)$，C$(1,\ 1)$ に対し，線分 AB を $t : 1-t$ に内分する点を P とし，線分 BC を $t : 1-t$ に内分する点を Q とする．さらに，線分 PQ を $t : 1-t$ に内分する点を R とし，点 P と点 Q を通る直線を l とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 R の座標を t を用いて表せ．

(2) 直線 l が曲線 $y = x^2$ の点 R における接線であることを示せ．

(3) t が条件 $0 < t < 1$ をみたしながら変化するとき，直線 l が通過する領域を図示せよ．

3 xy 平面上に原点 O と 2 点 A，B がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の大きさを 3，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の大きさを 4 とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角が $\dfrac{2\pi}{3}$ であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の大きさを求めよ．

(2) α が $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にあり，$\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$ をみたすとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角が 4α であるとき，△OAB の面積を求めよ．

(3) 点 E$(1,\ 0)$ に対し，

$$4\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} - 12\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{0}$$

が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

4 $f(x) = xe^x$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし e は自然対数の底とし，$2 < e < 3$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ であることは用いてよい．

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減およびグラフの凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = -1$，$x = 1$ および x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ．

(3) t を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = f(t)a_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．$t \leqq \dfrac{1}{2}$ ならば，$\{a_n\}$ は収束することを示せ．

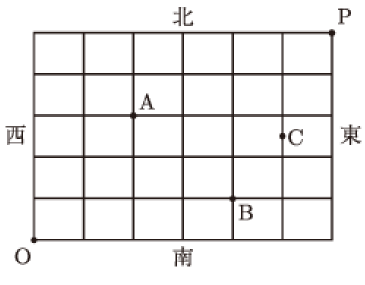
5 xy 平面において，点 P$(x,\ y)$ と点 $(2,\ 0)$ の距離が，点 P と直線 $x = 1$ の距離の $\sqrt{2}$ 倍と等しくなるような点 P の描く曲線を C とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の方程式を求めよ．

(2) t を 0 でない実数とし，曲線 C と直線 $x + y = t$ との交点を Q とする．点 Q の座標を t を用いて表せ．

(3) (2) で求めた点 Q から x 軸に下ろした垂線を QH とする．t が $2 \leqq t \leqq 4$ の範囲を動くとき，線分 QH が通過してできる図形の面積を求めよ．

6 右図のように，南北に 7 本，東西に 6 本の道がある．ただし，C 地点は通れないものとする．このとき，次の問いに答えよ．



(1) O 地点を出発し，A 地点を通り，P 地点へ最短距離で行く道順は何通りあるか．

(2) O 地点を出発し，B 地点を通り，P 地点へ最短距離で行く道順は何通りあるか．

(3) O 地点を出発し，A 地点と B 地点の両方を通り，P 地点へ最短距離で行く道順は何通りあるか．なお，同じ道を何度通ってもよいとする．

7 a を実数とし，関数 $f(x) = 4^x + a \cdot 2^{x-1} + a$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の最小値が -2 となるとき，a の値を求めよ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

8 次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $1 + x < e^x$ を示せ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ne^{-n^2}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} (2x^2 - 1)e^{-x^2} dx$ を求めよ．

9 a，b，c を実数とし，関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を考える．

$$I = \int_0^1 \left\{ f'(x) \right\}^2 dx$$

とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) I を a と b を用いて表せ．

(2) θ を $0 \leqq \theta < \pi$ をみたす実数とする．$a = \cos\theta$，$b = \sin\theta$ のとき，I を $\cos 2\theta$ と $\sin 2\theta$ を用いて表せ．

(3) (2) で求めた I の最大値，最小値を求めよ．