島根大学

数学

問題

2014年度入試

【学部】 教育学部、医学部、総合理工学部、生物資源科学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

【問題解答前の確認事項】

〔注意〕 総合理工（数理・情報システム）学部は 1 ～ 4，医（医）学部は 1，2，4，5，総合理工（物質科学・機械・電気電子工・建築・生産設計工・地球資源環境）学部は 6 ～ 8，教育・生物資源科学部は 6，7，9 を解答すること．

1 3つの箱 X, Y, Z と3つの玉 a, b, c があり，1つの箱には1つの玉が入るとする．箱 X には a が，箱 Y には b が，箱 Z には c が入っている状態から始めて，次の操作を繰り返し行う．
「数字1，2，3，4，5の中から無作為に1つの数字 m を選ぶ．$m=1$ ならば，箱 Y, Z にある玉をそれぞれ箱 Z, Y に移す．$m=2$ ならば，箱 X, Z にある玉をそれぞれ箱 Z, X に移す．$m=3$ ならば，箱 X, Y にある玉をそれぞれ箱 Y, X に移す．$m=4$ ならば，箱 X, Y, Z にある玉をそれぞれ箱 Y, Z, X に移す．$m=5$ ならば，箱 X, Y, Z にある玉をそれぞれ箱 Z, X, Y に移す．」
この操作を n 回繰り返したあとに3つの玉が最初の状態に戻っている確率を p_n とする．箱 X, Y, Z にそれぞれ玉 x, y, z が入っている状態を $(x,\ y,\ z)$ と表す．たとえば，最初の状態は $(a,\ b,\ c)$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 1回目の操作を行ったあとの起こりうる状態をすべて挙げ，p_1, p_2 を求めよ．

(2) n 回目の操作を行ったあとの状態が最初の状態 $(a,\ b,\ c)$ となっていない確率を q_n とする．$n \geqq 1$ のとき，$p_{n+1}=\dfrac{1}{5}q_n$ が成り立つことを示せ．

(3) p_n を求めよ．

2 $f(x)=\dfrac{8x}{\sqrt{x^2+1}}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ の凹凸と漸近線を調べて，そのグラフの概形をかけ．

(2) k を正の定数とする．関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x+k$ がちょうど2個の共有点をもつとき，k の値を求めよ．

(3) k を(2)で求めた定数とする．このとき，$x \geqq 0$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x+k$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

3 $a_1=2$ とし，$f(x)=x^2-3$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a_1,\ f(a_1))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_2 とする．以下同様に，$n=3,\ 4,\ \cdots$ に対して，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a_{n-1},\ f(a_{n-1}))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_n とする．数列 $\{a_n\}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) a_2 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(3) $a_n \geqq \sqrt{3}$ を示せ．

(4) $a_n-\sqrt{3} \leqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(2-\sqrt{3})$ を示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

4 $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ とおく．x を実数とし，行列

$$X=\begin{pmatrix}3x-1&2x-1\\-3x+2&-2x+2\end{pmatrix}$$

を定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して X の n 乗を $X^n=\begin{pmatrix}P_n(x)&Q_n(x)\\R_n(x)&S_n(x)\end{pmatrix}$ とおく．このとき，すべての n に対して，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき，$Q_n(x)=0$ であることを示せ．また，すべての n に対して，$x=\dfrac{2}{3}$ のとき，$R_n(x)=0$ であることを示せ．

(2) a と b は定数とする．このとき，$X^2+aX+bE=O$ をみたす実数 x が存在するための a, b の条件を求めよ．

(3) $X^3=O$ をみたす実数 x は存在しないことを証明せよ．

5 a, b, c, n を自然数とし，$a \leqq b \leqq c$ かつ $n(a+b+c)=abc$ をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a=b=c$ のとき，n は3の倍数であることを示せ．

(2) $n=3$ のとき，自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．

6 最初の持ち点を1点として，n 回硬貨を投げ，投げるたびに，表が出ると持ち点は $\dfrac{7}{4}$ 倍に，裏が出ると持ち点は $\dfrac{1}{2}$ 倍になるゲームを考える．たとえば，$n=2$ で表，裏の順に出れば，持ち点は $1\times\dfrac{7}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{8}$ 点となる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $n=2$ のとき，ゲームが終わったあとの持ち点のとりうる値をすべて求めよ．

(2) $n=4$ のとき，ゲームが終わったあとの持ち点が1点以下になる確率を求めよ．

(3) $n=k$ のとき，ゲームが終わったあとの持ち点の期待値を k を用いて表せ．

7 a，b は $a<b$ をみたす実数とする．放物線 $C\colon y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線 AB の方程式を a と b を用いて表せ．

(2) 放物線 C と直線 AB で囲まれた図形の面積 S を a と b を用いて表せ．

(3) $a<t<b$ の範囲で点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ が動くとき，放物線 C と直線 AP で囲まれた図形の面積を $S_1(t)$，放物線 C と 2 直線 AB，AP で囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする．このとき，等式 $S_2(t)=7S_1(t)$ をみたす t を a と b を用いて表せ．

8 点 $(0,\ 5)$ を通る直線 l と楕円 $C\colon \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 楕円 C と共有点をもつ直線 l の方程式をすべて求めよ．

(2) 楕円 C と直線 l が接するとき，その接点の座標を求めよ．

(3) 楕円 C と直線 l が第一象限で接するとき，C と l および y 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

9 a を実数とし，$f(x)=x^2+ax+a+3$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $x^2+ax+a+3=0$ が正の実数解のみをもつような a の値の範囲を求めよ．

(2) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標を $g(a)$ とする．このとき，a が (1) で求めた範囲を動くとき，$g(a)$ の最大値を求めよ．