岐阜大学

数学

問題

2018年度入試

【学部】　教育学部、地域科学部、医学部、工学部、応用生物科学部

【入試名】　前期日程

【試験日】　2月25日

【問題解答前の確認事項】

〔入試科目〕　(イ)数Ⅰ・Ⅱ・A (場 図)・B (列 ベ)，(ロ)数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A (場 図)・B (列 ベ)．工・医（医）・教育（数学）学部は(ロ)，地域科学・応用生物科学・医（看護）は(イ)を選択．教育（数学以外）学部は(イ)(ロ)のどちらか１つを選択．ただし，地域科学・医（看護）・教育（数学・理科・技術以外）は他教科との選択．
〔注意〕　(ロ)は 1 ～ 5，(イ)は 1 ～ 3，6，7 の合計５問を解答のこと．

1 $m,\ n$ を $m>n+1$ をみたす自然数とする．$S(n)=\sum_{k=1}^{6n}k^2$ とする．以下の問に答えよ．（配点比率 20%）

(1) $S(n)$ を n を用いて表せ．

(2) $S(m)-S(n)=(m-n)T(m,\ n)$ となる $T(m,\ n)$ を $m,\ n$ を用いて表せ．

(3) $S(m)-S(n)=2018$ をみたす $m,\ n$ を求めよ．ただし，必要ならば，1009 が素数であることを用いてよい．

2 原点を O とする座標空間に点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ \sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{C}(x,\ y,\ z)$ がある．点 C は内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2$ をみたすとする．また，$t=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とする．以下の問に答えよ．（配点比率 20%）

(1) t を x を用いて表せ．

(2) 条件 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2$ から $x,\ y,\ z$ がみたす関係式を求めよ．また，条件 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2$ から $x,\ y,\ z$ がみたす関係式を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を t を用いて表せ．

(4) $-2\leqq t\leqq 4$ となることを示せ．また，$t=4$ のとき，点 C の座標 $(x,\ y,\ z)$ を求めよ．

(5) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ の最大値を求めよ．

3 $a,\ b$ を実数とする．関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta)=a\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta\quad(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

とする．以下の問に答えよ．（配点比率 20%）

(1) 0 以上の実数 r と実数 $\alpha,\ \beta$ に対して，$p=r\cos\beta,\ q=r\sin\beta$ とおく．r を p と q を用いて表せ．また，次の等式が成り立つことを示せ．

$$r\sin(\alpha+\beta)=p\sin\alpha+q\cos\alpha$$

(2) 関数 $y=f(\theta)$ の最小値 m，最大値 M を $a,\ b$ を用いてそれぞれ表せ．

(3) すべての θ に対して $f(\theta)\geqq 0$ となる条件を $a,\ b$ を用いて表せ．

(4) すべての θ に対して $f(\theta)\leqq 0$ となる条件を $a,\ b$ を用いて表せ．

(5) 関数 $y=f(\theta)$ が θ の値によって正の値も負の値もとりうる条件を $a,\ b$ を用いて表せ．また，この条件をみたす点 $(a,\ b)$ 全体の集合を ab 平面上に図示せよ．

4 a を正の定数とする．極方程式

$$r=e^{a\theta}\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$$

で表される xy 平面上の曲線を C とする．曲線 C 上の点 P の座標を $(x,\ y)$ とおく．以下の問に答えよ．（配点比率 20%）

(1) $x,\ y$ を θ を用いてそれぞれ表せ．

(2) 曲線 C の長さを求めよ．

(3) 点 P における曲線 C の接線の方程式を θ を用いて表せ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．

(4) 曲線 C 上の点 P と原点を通る直線を l，点 P における曲線 C の接線を m とする．l と m のなす角は P によらず一定であることを示せ．

(5) l と m のなす角が $\frac{\pi}{12}$ となるような a の値を求めよ．

5 以下の問に答えよ．（配点比率 20%）

(1) 次の定積分を求めよ．$\displaystyle\int_0^1\frac{\log(x+1)}{x+1}\,dx$

(2) 次の定積分を求めよ．$\displaystyle\int_0^1\frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}\,dx$

(3) 正の実数 $x,\ h$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{x}-\frac{h}{x^2}<\frac{\log(x+h)-\log x}{h}<\frac{1}{x}$$

(4) 次の極限値を求めよ．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\log\frac{k+n+1}{k+n}\right)\log\frac{k+n}{n}$

6 最初 A，B，C の 3 人が，A を先頭に A，B，C の順で一列に並んでいる．さいころを投げるたびに，以下の操作を行う．

- 1 の目が出たら，先頭の人と 2 番目の人を入れ替える．
- 2 の目が出たら，2 番目の人と 3 番目の人を入れ替える．
- 1，2 以外の目が出たら，入れ替えを行わない．

n を自然数とする．n 回さいころを投げた後に A が先頭にいる確率を p_n，A が 2 番目にいる確率を q_n とする．以下の問に答えよ．（配点比率 20%）

(1) p_1，q_1 を求めよ．

(2) p_{n+1}，q_{n+1} を p_n，q_n を用いてそれぞれ表せ．

(3) q_n を求めよ．

(4) $a_n = 2^n\left(p_n - \dfrac{1}{3}\right)$ とおき，a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ．さらに，p_n を求めよ．

7 $a > 1$ とする．自然数 n に対して，

$$S_n = a^{3n+3} - 1$$

$$T_n = (a-1)(a^2+a+1)\sum_{k=1}^{n+1} a^{3k-3}$$

とする．以下の問に答えよ．（配点比率 20%）

(1) $S_1 = T_1$ を示せ．

(2) すべての n に対して，$S_{n+1} - S_n$ と $T_{n+1} - T_n$ が等しいことを示せ．また，数学的帰納法を用いて，$S_n = T_n$ を示せ．

(3) $2^{15} - 1$ を 7 で割ったときの余りを求めよ．

(4) 5^{2018} を 31 で割ったときの余りを求めよ．