岐阜大学

数学

問題

2014年度入試

【学部】 教育学部、地域科学部、医学部、工学部、応用生物科学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

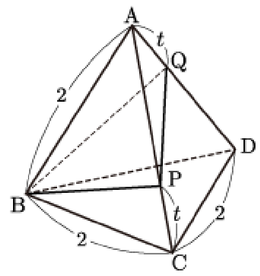
【問題解答前の確認事項】

〔入試科目〕 (イ)数Ⅰ・Ⅱ・A・B (列 ベ), (ロ)数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B (列 ベ)・C (行 曲). 工・医（医）・教育（数学）学部は(ロ), 地域科学・応用生物科学・医（看護）は(イ)を選択. 教育（数学以外）学部は(イ)(ロ)のどちらか1つを選択. ただし, 地域科学・医（看護）・教育（数学・理科・技術以外）は他教科との選択.

〔注意〕 (ロ)は 1 ～ 5, (イ)は 1 ～ 3, 6, 7 の合計5問を解答のこと.

1

t は実数で $0<t<2$ とする．図のように，1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD の辺 AC 上に点 P があり，辺 AD 上に点 Q がある．$\mathrm{CP}=\mathrm{AQ}=t$ のとき，以下の問に答えよ．（配点比率 20%）



(1) 線分 BP，PQ，QB の長さを，それぞれ t を用いて表せ．

(2) t が $0<t<2$ の範囲を変化するとき，三角形 BPQ の 3 辺の長さの和の最小値を求めよ．

(3) 三角錐 ABPQ の体積を t を用いて表せ．

(4) t が $0<t<2$ の範囲を変化するとき，三角錐 ABPQ の体積の最大値を求めよ．

2

サイコロを 3 回振り，出た目を順に a，b，c とする．関数 $f(x)$ を

$$f(x)=3ax^2-2bx+3c$$

と定める．以下の問に答えよ．（配点比率 20%）

(1) 方程式 $f(x)=0$ が $x=1$ を解にもつ確率を求めよ．

(2) 方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率を求めよ．

(3) 方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような $(a,\ b,\ c)$ の組について考える．このとき，x 軸と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる図形の面積 S を a，b，c を用いて表せ．また，S の最大値を求めよ．

3

2014^{10} に関して，以下の問に答えよ．ただし，必要ならば $7^9=40353607$ および $7^{10}=282475249$ を用いてよい．（配点比率 20%）

(1) 2014^{10} の十の位の数字を求めよ．

(2) 2014^{10} の十万の位の数字を求めよ．

(3) 2014^{10} の上 3 桁の数字を求めよ．

4

行列 I，J，O をそれぞれ $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ とする．また，実数 a，b を用いて $aI+bJ$ と表される行列全体の集合を U とおく．

行列 A，B が U に属するとき，以下の問に答えよ．（配点比率 20%）

(1) AB は U に属することを示せ．

(2) $AB=BA$ であることを示せ．

(3) $AB=O$ と仮定する．このとき $A=O$ または $B=O$ であることを示せ．

(4) $A^4+I=O$ をみたす A をすべて求めよ．

5

n を正の整数とし，$x\geqq 0$ とする．以下の問に答えよ．（配点比率 20%）

(1) $r_n(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n\right)$ とする．$r_n(x)\geqq 0$ を n に関する数学的帰納法を使って示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^ne^{-x}=0$ を示せ．

(3) $t\geqq 0$ とし，$f(t)=\displaystyle\int_0^t x^ne^{-x}\,dx$ とする．$\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)$ を求めよ．

6

(1) a，$b>0$ とする．このとき

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

であることを証明せよ．また，等号が成立するのは $a=b$ の場合だけであることを示せ．

(2) a，b，$c>0$ とする．このとき

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc$$

であることを証明せよ．また，等号が成立するのはどのような場合か述べよ．

(3) α，β，γ を三角形の 3 辺の長さとする．このとき

$$\alpha\beta\gamma\geqq(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$$

であることを証明せよ．また，等号が成立するのは正三角形の場合だけであることを示せ．

(4) α，β，γ を三角形の 3 辺の長さとする．このとき

$$\frac{\alpha}{-\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha-\beta+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}\geqq 3$$

であることを証明せよ．また，等号が成立するのは正三角形の場合だけであることを示せ．

（配点比率 20%）

7 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{3}{4},\quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．以下の問に答えよ．（配点比率 20%）

(1) a_2，a_3，a_4，a_5，a_6 を求めよ．また，それより一般項 a_n を推定せよ．

(2) 数学的帰納法により，(1) の一般項の推定が正しいことを証明せよ．

(3) n を正の整数とする．すべての実数 x に対して，不等式

$$a_n x^2 + x + 1 \geqq a_{n+1}$$

が成り立つことを示せ．

(4) n を正の整数とする．すべての実数 x に対して，不等式

$$x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \cdots + x^2 + x + 1 \geqq a_n$$

が成り立つことを示せ．