数　学

注意事項

1. 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始の指示があったら，すぐに「問題」と「答案用紙」および「計算用紙」の種類と枚数が以下のとおりであることを確認し，受験番号を「答案用紙」の6枚すべてに記入してください。
   - 問題　1枚
   - 答案用紙　（数学その1）～（数学その6）　各1枚　計6枚
   - 計算用紙　（その1）～（その3）　各1枚　計3枚

   （この「注意事項」は「計算用紙（その3）」のうら面に印刷されています。）
3. 「問題」1枚と「答案用紙」6枚および「計算用紙」3枚の種類や枚数が異なる場合や印刷が不鮮明な場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 解答は各答案用紙の指定された場所に書いてください。（数学その1）および（数学その2）では，おもて面に解答し，（数学その3）～（数学その6）では，うら面を使用する場合はその旨を記してください。
5. 「問題」1枚および「計算用紙」3枚は草案として使用してもかまいませんが，採点対象とはしません。必ず持ち帰ってください。
6. 試験終了後，「答案用紙」6枚はすべて回収します。上から（数学その1），（数学その2），…，（数学その6）の順に，おもて面を上にして，ひろげた状態で用紙の上下をそろえて6枚重ねてください。
7. すべての確認作業が終了するまで着席していてください。

平成31年度入学者選抜試験問題（数学）

1 次の問題文の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ク}}$ にあてはまるものを解答欄に記入せよ。

(1) 数を n 進法で表すとき，その右下に $_{(n)}$ と書く。 $1101_{(2)} + 110_{(2)}$ の計算結果を 10 進法で表すと $\boxed{\text{ア}}$ であり，$0.124_{(5)} \div 0.23_{(5)}$ の計算結果を 10 進法の小数で表すと $\boxed{\text{イ}}$ である。ただし，10 進法の場合は $_{(10)}$ を省略せよ。

(2) 不等式 $\dfrac{1}{2} - x \leqq \dfrac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}$ を満たす実数 x の値の範囲を求めると，$\boxed{\text{ウ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{エ}}$ となる。

(3) $\triangle$ABC の外接円の中心を O，半径を 1 とする。$2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{0}$ が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boxed{\text{オ}}$ であり，$\triangle$OAB の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 1 より大きい実数 x が $\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}\right) = 4$ を満たすとき，$\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3}\right)$ の値は $\boxed{\text{キ}}$ であり，実数 x の値は $x = \boxed{\text{ク}}$ である。

2 次の問題文の空欄 $\boxed{\text{ケ}}$ から $\boxed{\text{セ}}$ にあてはまるものを解答欄に記入せよ。

(1) $(x^3 + x^2 + x + c)^7$ を展開すると，$c = 2$ ならば x^3 の係数は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，$c = 1$ ならば x^5 の係数は $\boxed{\text{コ}}$ である。

(2) $f(x) = e^x \cos(\sqrt{3}x)$ とし，その第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と書く。$f^{(2)}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) = A\, e^{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$，$f^{(10)}\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = B\, e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$ (A, B は整数) と表すとき，$A = \boxed{\text{サ}}$，$B = \boxed{\text{シ}}$ である。

(3) 実数 a の関数 $f(a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{31}(ak - k + 1)^2$ が最小になるときの a の値は $a = \boxed{\text{ス}}$ であり，$f(a)$ の最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。分数は既約分数で答えよ。

3 山梨大学のある研究グループでは，ミーティングの後にコーヒーを飲む慣例になっている。各参加者がコーヒーに A：「角砂糖を入れない」，B：「角砂糖 1 個を入れる」，C：「角砂糖 2 個を入れる」のどれを選ぶかは独立で，すべて確率は $\dfrac{1}{3}$ であるとする。ある日のミーティングの後，20 人の参加者が 1 杯ずつコーヒーを飲み，角砂糖が 24 個使われていた。このとき，A が k 人，B が l 人，C が m 人であった確率を $p(k, l, m)$ として，$p(k, l, m)$ が最大になるときの整数の組 (k, l, m) を求めよ。ただし，角砂糖はコーヒーを飲むときにのみ使われるものとする。

4 $s = x + y + z$, $t = xy + yz + zx$, $u = xyz$ とおく。また，自然数 n に対して $p_n = x^n + y^n + z^n$ とおく。

(1) 任意の自然数 n に対して，p_{n+3} を s，t，u，p_n，p_{n+1}，p_{n+2} のみの整式として表せ。

(2) 任意の自然数 n に対して，p_n が s，t，u のみの整式として表されることを示せ。

5 関数 $f(x) = e^{-x}$ について，

$$I_n = \int_0^{2n} f(x)dx, \quad T_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-1}\Big\{f(k) + f(k+1)\Big\}, \quad S_n = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\Big\{f(2k) + 4f(2k+1) + f(2k+2)\Big\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおき，さらに $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$，$T = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$，$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ とする。このとき，$|I - T|$ と $|I - S|$ の大小を比較せよ。ただし，$2.71 < e < 2.72$ である。

6 楕円 $C: \dfrac{x^2}{3} + y^2 = 1$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ から C に引いた 2 本の接線の方程式を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{Q}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ から C に引いた 2 本の接線と (1) の 2 本の接線で作られる四角形の面積 S を求めよ。