山梨大学　後期　数　学

注意事項

1. 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始の指示があったら，すぐに「問題」と「答案用紙」および「計算用紙」の種類と枚数が以下のとおりであることを確認し，受験番号を「答案用紙」の７枚すべてに記入してください。
   - 問題　　　　　　　　　　　　　　　　　　1枚
   - 答案用紙　（数学その1）～（数学その7）　各1枚　計7枚
   - 計算用紙　（その1）～（その4）　　　　　各1枚　計4枚

   （この「注意事項」は「計算用紙（その４）」のうら面に印刷されています。）
3. 「問題」1枚と「答案用紙」7枚および「計算用紙」4枚の種類や枚数が異なる場合や印刷が不鮮明な場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 解答は各答案用紙の指定された場所に書いてください。（数学その1）ではおもて面に解答し，（数学その1）以外では，うら面を使用する場合はその旨を記してください。
5. 「問題」1枚および「計算用紙」4枚は草案として使用してもかまいませんが，採点対象とはしません。必ず持ち帰ってください。
6. 試験終了後，「答案用紙」7枚はすべて回収します。上から（数学その1），（数学その2），...，（数学その7）の順に，おもて面を上にして，ひろげた状態で用紙の上下をそろえて7枚重ねてください。
7. すべての確認作業が終了するまで着席していてください。

平成25年度入学者選抜試験問題（数学）

1 次の問題文の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ケ}}$ にあてはまるものを解答欄に記入せよ。

(1) $x>0$ において定義された関数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ について，最大値は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -18 & 13\end{pmatrix}$ とする。定数 a, b について $P_1=\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1\\ b\end{pmatrix}$ とおく。定数 k について $AP_1=kP_1$ および $AP_2=P_1+kP_2$ が成り立つならば，$(a,b,k)=\boxed{\text{イ}}$ である。このとき $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3) 連立不等式 $\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq x+\dfrac{5}{2}\end{cases}$ の表す領域を A とし，不等式 $x^2+(y-1)^2 \leqq r^2$ の表す領域を B_r とする。このとき $B_r \subset A$ となるような実数 r の最大値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(4) 4 次式 $x^4-2x^3+x^2-1$ を係数が整数であるような 2 次式 2 個の積に因数分解すると，$x^4-2x^3+x^2-1=\boxed{\text{オ}}$ となる。方程式 $x^4-2x^3+x^2-1=0$ の 4 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ とすると，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\boxed{\text{カ}}$ であり，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=\boxed{\text{キ}}$ である。

(5) $f(x)=\sin x+\cos x$ とする。各自然数 n に対して関数 $g_n(x)$ は x の n 次式で表され，

$$g_n(0)=f(0),\ g_n'(0)=f'(0),\ g_n''(0)=f''(0),\ \cdots,\ g_n^{(n)}(0)=f^{(n)}(0)$$

を満たすものとする。このとき $g_3(x)=\boxed{\text{ク}}$ であり，$|g_{n+1}(1)-g_n(1)|<\dfrac{1}{2013}$ となる最小の自然数 n は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

2 大，中，小 3 個のさいころを同時に振り，出た目の数をそれぞれ a, b, c とする。

(1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<1$ となる確率を求めよ。

(2) X を $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ を超えない最大の整数とする。X の期待値を求めよ。

3 xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ から放物線 $C: y=\dfrac{x^2}{2}$ へ 2 本の接線がひけるとし，接点を Q, R とする。

(1) $\angle\mathrm{QPR}=90^\circ$ となるような点 P の軌跡を図示せよ。

(2) $\angle\mathrm{QPR}=45^\circ$ となるような点 P の軌跡を図示せよ。

4 次の問いに答えよ。

(1) 各自然数 n に対して $S_n(x)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}$ とおく。各自然数 n に対して $x>0$ のとき $S_n(x)<e^x$ であることを示せ。

(2) 関数 $f_0(x)$ をすべての実数 x で $f_0(x)=1$ と定義する。各自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=1+\int_0^x\{f_{n-1}(t)+t\}dt$$

で定める。このとき各自然数 n に対して $f_n(x)$ は x の多項式であることを示し，その係数をすべて求めよ。